

**Sbírka příkladů**

**pro předmět**

**FYZIKA 1 (B3B02FY1)**

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
1.1 rozměrová analýza – Galileo - kyvy lucerny . . . . .	6
1.2 rozměrová analýza – přesýpací hodiny . . . . .	6
1.3 rozměrová analýza – tlak uvnitř Slunce a Země . . . . .	6
1.4 rozměrová analýza – frekvence struny . . . . .	6
1.5 rozměrová analýza – volný pád . . . . .	6
<b>2 Kinematika</b>	<b>7</b>
2.1 rovnoměrný kruhový pohyb . . . . .	7
2.2 vzájemná rychlost dvou částic . . . . .	7
2.3 vlak míjí výpravčího . . . . .	7
2.4 autobusy na Strahov . . . . .	7
2.5 rychlost z dráhy pro nerovnoměrný pohyb . . . . .	7
2.6 výpočet vzdálenosti Ferdý a Berušky . . . . .	7
2.7 parametrický pohyb pohybu . . . . .	8
2.8 kulička na kružnici (Markus Marci) . . . . .	8
2.9 rovnoměrně zrychlený pohyb tryskového letadla . . . . .	8
2.10 nerovnoměrně zrychlený pohyb . . . . .	8
2.11 přímočarý pohyb s rovnoměrně rostoucím zrychlením . . . . .	8
2.12 hloubka studny na Zbirohu . . . . .	9
2.13 pošťák . . . . .	9
2.14 rumpál - rozklad zrychlení na tečnou a normálovou složku . . . . .	9
2.15 vrh kolmý vzhůru - vyplašený pásovec . . . . .	9
2.16 kombinace vrhu kolmého vzhůru a volného pádu . . . . .	9
2.17 vrh svislý dolů, výpočet počáteční rychlosti . . . . .	9
2.18 vrh kolmý vzhůru . . . . .	9
2.19 vrh kolmý vzhůru . . . . .	10
2.20 vrh kolmý vzhůru . . . . .	10
2.21 výpočet elevačního úhlu pro šikmý vrh . . . . .	10
2.22 vrh kolmý vzhůru - dostup . . . . .	10
2.23 vrh kolmý vzhůru - výška s poloviční rychlostí . . . . .	10
2.24 vrh šikmý . . . . .	10
2.25 obvodová rychlost . . . . .	11
2.26 úhlová rychlost . . . . .	11
2.27 frekvence otáčení . . . . .	11
2.28 píst pohání kliku . . . . .	11
2.29 diavolo v kruhové smyčce . . . . .	11
2.30 frekvence otáčení . . . . .	11
2.31 kinematika rotačního pohybu . . . . .	11
2.32 rovnoměrně zpožděný rotační pohyb setrvačnicku – výpočet úhlového zrychlení a počtu otáček	12

<b>3</b>	<b>Dynamika</b>	<b>13</b>
3.1	výpočet síly z rychlosti . . . . .	13
3.2	Coriolisova síla . . . . .	13
3.3	pružinový kanón . . . . .	13
3.4	vzájemné působení dvou částic . . . . .	13
3.5	těleso zrychluje vlivem konstantní síly . . . . .	13
3.6	brzdící železniční vagon . . . . .	13
3.7	pohyb vozíku s klesající hmotností – rychlost a zrychlení . . . . .	14
3.8	pohyb železničního vozu, jehož hmotnost klesá – Newtonova pohybová rovnice . . . . .	14
3.9	kulička bržděná Stokesovou silou - Newtonova pohybová rovnice . . . . .	14
3.10	lano klouže ze stolu – Newtonova pohybová rovnice . . . . .	14
3.11	stanovení síly při pádu vlákna . . . . .	15
3.12	koeficient tření na nakloněné rovině . . . . .	15
3.13	pohyb sáněk ze svahu . . . . .	15
3.14	pohyb po povrchu koule . . . . .	15
3.15	koeficient tření pro auto v zatáčce . . . . .	15
3.16	artista v kruhové smyčce . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Hybnost, práce, výkon, energie</b>	<b>16</b>
4.1	hybnost, přehození pytle mezi loďkami . . . . .	16
4.2	výpočet práce potřebné pro změnu rychlosti . . . . .	16
4.3	práce síly po dráze . . . . .	16
4.4	definice výkonu . . . . .	16
4.5	srážkový urychlovač, ráz dvou kuliček . . . . .	16
4.6	ráz dvou částic . . . . .	16
4.7	chůze na lodi - zákon zachování hybnosti . . . . .	17
4.8	balistické kyvadlo . . . . .	17
4.9	posuv dřevěného hranolu vlivem střely – výpočet rychlosti střely a doby pohybu . . . . .	17
4.10	zpětný ráz pušky – zákon zachování hybnosti . . . . .	17
4.11	pohyb nebrzděného děla – zákon zachování hybnosti . . . . .	17
4.12	spojení vagónů – zákon zachování hybnosti a energie . . . . .	17
4.13	řidič přejel slepici – zákon zachování energie . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Mechanika tuhého tělesa</b>	<b>19</b>
5.1	těžiště čtyřbodové soustavy . . . . .	19
5.2	těžiště polokoule . . . . .	19
5.3	těžiště tenké tyčky s proměnnou lineární hustotou . . . . .	19
5.4	těžiště kužele . . . . .	19
5.5	těžiště půlkruhové desky . . . . .	19
5.6	moment setrvačnosti homogenního kužele . . . . .	20
5.7	moment setrvačnosti homogenní tyče (střed, konec, 1/4 od konce) . . . . .	20
5.8	moment setrvačnosti homogenní koule . . . . .	20
5.9	moment setrvačnosti válce pro kolmou osu . . . . .	20
5.10	moment setrvačnosti homogenního dutého válce . . . . .	20
5.11	vědro na rotujícím rumpálu . . . . .	20
5.12	roztáčení setrvačníku . . . . .	20
5.13	valení válce po nakloněné rovině . . . . .	20
5.14	rotace dřevěné tyče . . . . .	21
5.15	valení kulečnickové koule . . . . .	21
5.16	rozklad sil na vzpěře . . . . .	21

5.17 rovnováha nosníku . . . . .	21
5.18 rovnováha žebříku . . . . .	21
5.19 jednodušší rovnováha žebříku . . . . .	21
5.20 rovnováha tří lahváčů . . . . .	21
5.21 redukovaná délka kyvadla . . . . .	22
5.22 kinetická energie rotoru . . . . .	22
5.23 tržná délka drátu . . . . .	22
5.24 práce při výstupu po pružném laně . . . . .	22
5.25 tvar pilíře s konstantním normálovým napětím . . . . .	22
5.26 zkrácení zatíženého nosníku . . . . .	22
5.27 prodloužení rotující tyče . . . . .	22
5.28 výpočet Youngova modulu pružnosti . . . . .	23
5.29 tlak vyvolaný teplotní roztažností . . . . .	23
<b>6 Mechanika tekutin</b>	<b>24</b>
6.1 rovnice kontinuity . . . . .	24
6.2 výpočet materiálu koule – Archimedův zákon . . . . .	24
6.3 poloměr balonu – Archimedův zákon . . . . .	24
6.4 tloušťka stěny plovoucí koule . . . . .	24
6.5 tvar vodních hodin – klepsydra . . . . .	24
6.6 tvar hladiny v brzdící cisterně . . . . .	24
6.7 práce na vytažení přehradní rovinné desky . . . . .	25
6.8 výtok vody malým otvorem ve dně . . . . .	25
6.9 práce na vytažení plovoucí koule . . . . .	25
6.10 rotující Newtonovo vědro . . . . .	25
6.11 síla působící na čtvercovou stěnu akvária . . . . .	25
6.12 plovoucí korková koule . . . . .	25
6.13 injekční stříkačka . . . . .	25
6.14 voda ze dvou otvorů stříká do stejné vzdálenosti . . . . .	26
<b>7 Teoretická mechanika</b>	<b>27</b>
7.1 kyvadlo – Lagrangeovy rovnice II druhu . . . . .	27
7.2 rotující kyvadlo – Lagrangeovy rovnice II druhu . . . . .	27
7.3 padající tyč – Lagrangeovy rovnice II druhu . . . . .	27
7.4 rovnoměrně zrychlená nakloněná rovina – Lagrangeovy rovnice II druhu . . . . .	27
7.5 dvě kuličky spojené provázkem – Lagrangeovy rovnice II. druhu . . . . .	27
7.6 korálek na kruhové smyčce – Lagrangeovy rovnice II. druhu . . . . .	27
7.7 závaží na pružině – Lagrangeovy rovnice II. druhu . . . . .	27
7.8 závaží na pružině – Hamiltonovy kanonické rovnice . . . . .	28
7.9 padající tyč – Hamiltonovy kanonické rovnice . . . . .	28
7.10 korálek na kruhové smyčce – Hamiltonovy kanonické rovnice . . . . .	28
<b>8 Gravitační pole</b>	<b>29</b>
8.1 Keplerůvy zákony . . . . .	29
8.2 Keplerovy zákony . . . . .	29
8.3 Keplerovy zákony . . . . .	29
8.4 Lagrangeovy body . . . . .	29
8.5 vzdálenost a oběžná rychlost stacionární družice . . . . .	29
8.6 intenzita a potenciál gravitačního pole nekonečně dlouhé přímky . . . . .	29
8.7 intenzita a potenciál gravitačního pole kruhové desky . . . . .	30
8.8 hloubka a výška, ve kterých je gravitační síla stejná . . . . .	30

8.9 gravitační síla vytvářená tyčí . . . . .	30
8.10 gravitační zrychlení v zadané výšce . . . . .	30
<b>9 Elektřina a magnetismus</b>	<b>31</b>
9.1 intenzita elektrického pole mezi dvěma náboji v petroleji . . . . .	31
9.2 potenciál a intenzita elektrického pole tenké kruhové desky . . . . .	31
9.3 úhel mezi zavěšenými elektricky nabitými kuličkami . . . . .	31
9.4 kapacita kondenzátoru se soustřednými kulovými plochami . . . . .	31
9.5 kapacita válcového kondenzátoru . . . . .	31
9.6 kapacita a energie deskového kondenzátoru . . . . .	31
9.7 kapacita deskového kondenzátoru částečně vyplněného dielektrikem . . . . .	32
9.8 kapacita dvojlinky . . . . .	32
9.9 intenzita elektrického pole nabitě niti nekonečné délky . . . . .	32
9.10 intenzita elektrického pole nabitě kruhové desky . . . . .	32
9.11 potenciál a intenzita elektrického pole nabitě vodivé koule obklopené vakuem . . . . .	32
9.12 elektrický potenciál spojených kapek . . . . .	33
9.13 divergence vektoru intenzity elektrické pole bodového náboje . . . . .	33
9.14 rotace vektoru intenzity elektrické pole bodového náboje . . . . .	33
9.15 divergence vektoru magnetické indukce přímého vodiče . . . . .	33
9.16 rotace vektoru magnetické indukce přímého vodiče . . . . .	33
9.17 magnetické indukce buzená dvěma přímými vodiči . . . . .	33
9.18 magnetické intenzita ve středu kotouče . . . . .	33
9.19 elektrický odpor prstence . . . . .	33
9.20 proudová hustota, unášivá elektronu ve vodiči . . . . .	34
9.21 energie magnetického pole, vlastní indukčnost . . . . .	34
9.22 magnetické pole nekonečně dlouhého vodiče pomocí Biot-Savartova zákona . . . . .	34
9.23 magnetická indukce nekonečně dlouhého vodiče pomocí zákona celkového proudu . . . . .	34
9.24 vlastní indukčnost toroidální cívky . . . . .	34
9.25 síla, kterou na sebe působí dva vodiče . . . . .	35
9.26 práce elektrického proudu . . . . .	35
9.27 topná spirála . . . . .	35
9.28 hybnost elektronů tvořících elektrický proud . . . . .	35
9.29 pohyb nabitě částice ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli . . . . .	35
9.30 kolejnicový urychlovač . . . . .	35
9.31 Faradayův indukční zákon . . . . .	35
9.32 proud indukovaný v rotující kruhové smyčce – Faradayův indukční zákon . . . . .	36
<b>10 Harmonické kmity</b>	<b>37</b>
10.1 amplituda a fáze harmonického pohybu . . . . .	37
10.2 parametry harmonického pohybu . . . . .	37
10.3 těleso kmitá na pružině, výpočet zkrácení pružiny . . . . .	37
10.4 těleso kmitá na pružině, výpočet frekvence . . . . .	37
10.5 výpočet součinitele tlumení a logaritmického dekrementu útlumu . . . . .	37
10.6 doba, za kterou se sníží energie ladičky, činitel jakosti ladičky . . . . .	38
10.7 výpočet frekvence harmonického oscilátoru z jeho energie . . . . .	38
10.8 výpočet logaritmického dekrementu útlumu ze ztráty energie . . . . .	38
10.9 rezonanční frekvence z pohybové rovnice . . . . .	38
10.10 u-trubice . . . . .	38
10.11 mobil padá do kanálu . . . . .	38
10.12 harmonické kmity spojených závaží . . . . .	38

10.13 kruhová deska koná harmonický pohyb . . . . .	39
10.14 harmonicky kmitající závaží . . . . .	39
10.15 skládání rovnoběžných kmitů . . . . .	39
10.16 skládání rovnoběžných kmitů . . . . .	39
10.17 skládání navzájem kolmých kmitů . . . . .	39
10.18 skládání navzájem kolmých kmitů . . . . .	39
10.19 skládání navzájem kolmých kmitů, výpočet rychlosti a zrychlení . . . . .	39
10.20 skládání navzájem kolmých kmitů – Lissajousovy obrazce . . . . .	40
<b>11 Relativita</b>	<b>41</b>
11.1 výpočet rychlosti elektronu z urychlujícího napětí . . . . .	41
11.2 výpočet urychlujícího napětí elektronu a rychlosti elektronu . . . . .	41
11.3 dilatace času . . . . .	41
11.4 kontrakce délky . . . . .	41
11.5 dilatace času . . . . .	41
11.6 ztráta hmotnosti Slunce vlivem vyzářené energie . . . . .	41
11.7 dvě rakety - relativistické skládání rychlostí . . . . .	42
11.8 silniční pirát – relativistický Dopplerův jev . . . . .	42
11.9 dilatace času . . . . .	42
11.10 relativistická hmotnost . . . . .	42

# Kapitola 1

## Úvod

### Příklad 1.1

Mladý Galileo Galilei při pozorování kyvů lucerny, zavěšené na dlouhém závěsu pisánského kostela (narodil se a studoval v Pise) zjistil, že perioda nezávisí na počáteční výchylce. Domníval se, že závisí na délce kyvadla  $l$ , jeho hmotnosti  $m$  a tíhovém zrychlení  $g$ . Odhadněte závislost dobu kyvu kyvadla  $t$  na těchto veličinách pomocí rozměrové analýzy.  $\left[ t = kl^{\frac{1}{2}}m^0g^{-\frac{1}{2}} \right]$

### Příklad 1.2

Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek úzkým hrdlem o ploše  $S$  z horní do dolní nádoby. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání  $\Delta m/\Delta t$  (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru  $S$  mezi nádobami, hustotě zrněk písku  $\rho$  a (zřejmě) na tíhovém zrychlení  $g$ . Naopak, nezávisí na velikosti zrněk a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro rychlost sypání  $\Delta m/\Delta t$  písku v hodinách  $\left[ \frac{\Delta m}{\Delta t} = kS^{\frac{5}{4}}\rho g^{\frac{1}{2}} \right]$

### Příklad 1.3

Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti  $M$ , poloměru  $R$ , a jelikož jistě souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě, gravitační konstanta je rovna  $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku  $p$  v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ( $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ,  $R_S = 696\,000 \text{ km}$ ) a Zemi ( $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_Z = 6378 \text{ km}$ ).  $[p = k\kappa M^2 R^{-4}]$

### Příklad 1.4

U strunného hudebního nástroje víme, že frekvence, na které zní konkrétní struna souvisí s její délkou  $l$ , silou  $F$ , kterou strunu napínáme a tloušťkou struny, kterou můžeme vyjádřit pomocí hmotnosti vztažené na jednotku délky  $\mu$ . Najděte pomocí rozměrové analýzy vzorec pro frekvenci struny  $f$  s využitím veličin  $l$ ,  $F$  a  $\mu$ .  $\left[ f = kl^{-1}F^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}} \right]$

**Příklad 1.5** Pomocí rozměrové analýzy určete vzorec pro dráhu tělesa při volném pádu  $[x = Cgt^2]$

# Kapitola 2

## Kinematika

### Příklad 2.1

Země oběhne kolem Slunce přibližně rovnoměrným pohybem po kružnici za 365,25 dní. Jaká je její rychlost vzhledem ke Slunci, je-li střední vzdálenost Země o Slunce  $149,6 \cdot 10^6$  km?  $\left[ v = \frac{2\pi r}{t} = 29,78 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

### Příklad 2.2

Dvě částice se pohybují rychlostmi o vektorech  $\vec{v}_1 = (2, 0)$  a  $\vec{v}_2 = (0, 3)$ . V čase  $t = 0$  se nacházely v bodech  $\vec{r}_{10} = (-3, 0)$  a  $\vec{r}_{20} = (0, -3)$ . Určete

a) vektor vzájemné polohy částic  $\left[ \vec{r} = (3 - 2t, -3 + 3t) \right]$

b) čas maximálního sblížení  $\left[ t_0 = \frac{15}{13} \right]$

c) vzdálenost částic v okamžiku maximálního sblížení  $\left[ l = \frac{3\sqrt{13}}{13} \right]$

### Příklad 2.3

Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu  $\Delta t_1$ . Jakou dobu  $\Delta t_n$  míjí výpravčího  $n$ -tý vagón?  $\left[ \Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \right]$

### Příklad 2.4

Student se po přednášce z fyziky vrací pěšky z Dejvic na kolej Strahov a přitom si všimne, že autobus číslo 143 jej v protisměru míjí s intervalem  $T_p = 10 \text{ min } 48 \text{ s}$ , autobus jedoucí ve směru chůze s intervalem  $T_v = 13 \text{ min } 30 \text{ s}$ . spočítejte

a) interval  $T$  ve kterém autobus jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný)  $\left[ T = \frac{2T_p T_v}{T_v + T_p} = 12 \text{ min} \right]$

b) poměr rychlosti  $\beta$  chůze studenta ku rychlosti autobusu.  $\left[ \beta = \frac{T_v + T_p}{T_v - T_p} = 9 \right]$

### Příklad 2.5

Částice se pohybuje přímočaře po ose  $x$  podle zákona  $x = At + Bt^2$ , kde  $A = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $B = 6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete

a) časovou závislost okamžité rychlosti  $\left[ v(t) = A + 2Bt \right]$

b) okamžitou rychlost částice  $v_1$  začátkem desáté sekundy  $\left[ v = 113 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

c) okamžitou rychlost částice  $v_2$  koncem dvanácté sekundy  $\left[ v = 149 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

d) střední rychlost  $\bar{v}$  v intervalu mezi těmito okamžiky  $\left[ \bar{v} = 131 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \right]$



### Příklad 2.6

Beruška sedí ve středu kartézských souřadnic, Ferda Mravenec ve vzdálenosti  $l_F$  na ose  $x$ . V čase  $t = 0$  začne Beruška létat rychlostí  $v_B$  v kladném směru osy  $y$  a Ferda rychlostí  $v_F$  v záporném směru osy  $x$ . Najděte

- a) vzájemnou vzdálenost  $l_{FB}(t)$  jako funkci času  $\left[ l_{FB} = \sqrt{(x_F - v_F t)^2 + (v_B t)^2} \right]$
- b) čas  $t_n$  kdy si jsou nejbliže  $\left[ t_n = \frac{v_F x_F}{v_F^2 + v_B^2} \right]$
- c) jejich nejmenší vzdálenost  $l_n$   $\left[ l_n = \frac{x_F v_B}{\sqrt{v_F^2 + v_B^2}} \right]$

### Příklad 2.7

Pohyb částice je určen parametricky jako  $x = A_1 t^2 + B_1$ ,  $y = A_2 t^2 + B_2$ , kde  $A_1 = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $A_2 = 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $B_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $B_2 = -3 \text{ cm}$ . Určete

- a) vektor rychlosti částice v okamžiku  $t = 2 \text{ s}$ .  $\left[ \vec{v} = (80, 60) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \right]$
- b) vektor zrychlení částice v okamžiku  $t = 2 \text{ s}$ .  $\left[ \vec{a} = (40, 30) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \right]$

### Příklad 2.8

Mějme kružnici o poloměru  $R$  ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábků ve směru tětiv k obvodu kružnice. Do žlábků vložíme malou kuličku a vypustíme.

- a) Určete čas, za který kulička dospěje na okraj kružnice.  $\left[ t = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \right]$
- b) Jak tento čas závisí na sklonu žlábků?  $\left[ \text{čas nezávisí na sklonu žlábků} \right]$

Úlohu poprvé řešil v 1. polovině 17. století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu ve své knize *O úměrnosti pohybu*.

### Příklad 2.9

Startující tryskové letadlo musí mít před vzletnutím rychlost nejméně  $v_1 = 360 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé  $x_1 = 1,8 \text{ km}$  ?

$$\left[ a = \frac{v_1^2}{2x_1} = 2,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \right]$$

### Příklad 2.10

Částice se pohybuje podél osy  $x$  tak, že pro její zrychlení platí  $a = a_0(1 - e^{-kt})$ , kde  $a_0 > 0$ ,  $k > 0$  jsou konstanty a  $t$  je čas. V čase  $t = 0$  platí počáteční podmínky  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ . Vypočítejte

- a) rychlost částice  $v(t)$  jako funkci času  $\left[ v = a_0 t - \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt}) \right]$
- b) polohu částice  $x(t)$  jako funkci času  $\left[ x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{a_0}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{a_0 t}{k} \right]$

### Příklad 2.11

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku  $t_1 = 90 \text{ s}$  má hodnotu  $a_1 = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete:

- a) závislost rychlosti a dráhy na čase,  $\left[ v = \frac{a_1}{2t_1} t^2 \right]$   $\left[ \frac{a_1}{6t_1} t^3 \right]$
- b) rychlost a uraženou dráhu pro čas  $t = t_1$ ,  $\left[ v(t_1) = \frac{a_1}{2} t_1 = 22,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$   $\left[ x(t_1) = \frac{a_1}{6} t_1^2 = 675 \text{ m} \right]$

### Příklad 2.12

Student se na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadne pětikoruna. Ihned zapne stopky na mobilním telefonu a změří, že žuchnutí mince o dno uslyší za čas  $t = 6,24$  s po vypadnutí mince.

tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , rychlost zvuku ve studni je  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Určete, jak hluboká je studna na zámku Zbiroh  $\left[ h = \frac{c^2}{4} \left( \sqrt{\frac{2}{g} + \frac{4t}{c}} - \sqrt{\frac{2}{g}} \right)^2 = 162,8 \text{ m} \right]$

### Příklad 2.13

Člověk stojící ve vzdálenosti  $h = 50$  metrů od silnice vidí pošťáka, který po ní jede na kole rychlostí  $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . V okamžiku kdy jej spatří, je jejich vzdálenost  $s = 200$  metrů.

pod jakým úhlem  $\alpha$  musí běžet k silnici rychlostí  $v_2 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , aby se s pošťákem setkal?  $\left[ \sin \alpha = \frac{hv_1}{sv_2} \right]$

### Příklad 2.14

Kbelík zavěšený na provázku omotaném kolem rumpálu o poloměru  $R$  padá do studny. Jeho dráha je dána vztahem  $s = \frac{1}{2}kt^2$

Jaká je velikost zrychlení malého pavoučka o hmotnosti  $m$  který sedí na rumpálu?  $\left[ \sqrt{k^2 + \frac{k^4 t^4}{R^2}} \right]$

### Příklad 2.15

Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.

V čase  $t_1 = 0,2$  s se nachází ve výšce  $y_1 = 0,544$  m.

a) jaká je jeho počáteční rychlost  $v_0$ ?  $\left[ v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{1}{2}gt_1 = 3,701 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

b) jaká je jeho rychlost  $v_1$  v zadané výšce  $y_1$ ?  $\left[ v_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{1}{2}gt_1 = 1,739 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

c) o jakou výšku  $\Delta y$  ještě vyplašený pásovec nastoupá?  $[\Delta y = 0,154 \text{ m}]$



### Příklad 2.16

Těleso bylo vrženo ze zemského povrchu svisle vzhůru rychlostí  $v_0 = 4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Současně z výšky, kterou toto první těleso maximálně dosáhne, začíná padat druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí. Určete

čas a výšku, ve které se obě tělesa střetnou, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   $\left[ h = \frac{7v_0^2}{32g} = 0,53 \text{ m} \right]$

### Příklad 2.17

Určete počáteční rychlost  $v_0$  tělesa při vrhu svislém dolů z výšky  $h = 122$  m, má-li za poslední sekundu svého pohybu urazit polovinu celkové dráhy, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\left[ v_0 = \frac{1}{2t_1} \sqrt{h^2 - 6ght_1^2 + g^2 t_1^4} = 44,157 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

### Příklad 2.18

Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí  $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Zároveň je z výšky  $h$  volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso? tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   $\left[ h = \frac{2v_0^2}{g} = 1,8 \text{ m} \right]$

### Příklad 2.19

Těleso je vrženo v okamžiku  $t = 0 \text{ s}$  svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce  $h$  prochází v okamžiku  $t_1 = 5 \text{ s}$  směrem vzhůru a v okamžiku  $t_2 = 10 \text{ s}$  směrem dolů, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete

a) počáteční rychlost tělesa  $v_0$   $\left[ v_0 = g \cdot \frac{t_1 + t_2}{2} = 73,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

b) výšku  $h$   $\left[ h = g \cdot \frac{t_1 t_2}{2} = 245,25 \text{ m} \right]$

**Příklad 2.20** Jakou rychlostí je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky  $h = 100 \text{ m}$ , aby dopadlo o čas  $\tau = 1 \text{ s}$  dříve než při volném pádu? tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\left[ v_0 = \frac{h - \frac{1}{2}g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right)^2}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau} = g\tau \frac{\sqrt{8hg} - g\tau}{\sqrt{8hg} - 2g\tau} = 11,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

### Příklad 2.21

Pod jakým elevačním úhlem  $\alpha$  musí být vystřelená střela počáteční rychlostí  $v_0 = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , aby zasáhla cíl  $C$  vzdálený  $x_1 = 20 \text{ km}$ , ve výšce  $y_1 = 1 \text{ km}$ ? tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vypočtenou elevaci vyjádřete ve stupních.

$$\left[ (\tan \alpha)_{1,2} = \frac{1}{x_1} \left[ \frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{2 \frac{v_0^2}{g} \left( \frac{v_0^2}{2g} - y_1 \right) - x_1^2} \right] = \{63,2^\circ; 29,7^\circ\} \right]$$

### Příklad 2.22

Fotbalista vykopl míč rychlostí  $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  svisle vzhůru.

a) Do jaké výšky vystoupil za dobu  $2 \text{ s}$ ?  $\left[ y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 30 \text{ m} \right]$

b) Za jakou dobu dosáhl míč své největší výšky?  $\left[ t_D = \frac{v_{y0}}{g} = 2,5 \text{ s} \right]$

### Příklad 2.23

Kámen je vržen svisle vzhůru o velikosti  $v_0$ . Určete, v jaké výšce od vodorovné roviny se velikost rychlosti kamene zmenší dvakrát. Odpor vzduchu zanedbáváme.  $\left[ y = \frac{3v_0^2}{8g} \right]$

### Příklad 2.24

Dopravníkový pás se pohybuje vodorovným směrem rychlostí  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Do jaké vzdálenosti  $d$  od konce pásu dopadá transportovaný materiál, padá-li z výšky

$$h=1,8 \text{ m? } \left[ d = v \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1,21 \text{ m} \right]$$

### Příklad 2.25

Sekundová ručka hodinek je o třetinu delší než minutová. V jakém poměru jsou rychlosti jejich koncových bodů? [80 : 1]

### Příklad 2.26

Oběžné kolo turbíny o průměru 1500 mm koná 3600 otáček za minutu

a) Jaká je úhlová rychlost kola? [ $\omega = 2\pi f = 377 \text{ s}^{-1}$ ]

b) Jak velkou rychlost mají body na obvodu kola? [ $v = \pi d f = 282,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

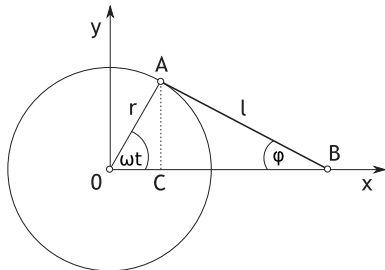
### Příklad 2.27

Jakou frekvenci otáčení musí mít vřeteno soustruhu, aby válec o průměru 40 mm byl obráběn řeznou rychlostí  $72 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ ? Řezná rychlost odpovídá rychlosti bodu na obvodu válce. [ $f = \frac{v}{\pi d} = 9,55 \text{ Hz}$ ]

### Příklad 2.28

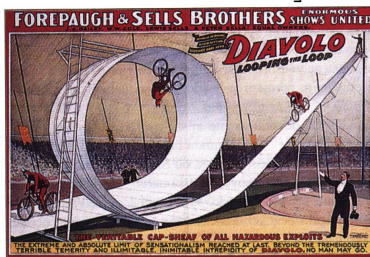
Kloub  $A$  pohybuje konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  po kružnici poloměru  $r$ . Bod  $B$  leží konci tyče délky  $l$  a je nucen se pohybovat podél osy  $x$ . Vyjádřete časovou závislost polohy bodu  $B$  na ose  $x$ .

$$\left[ x_B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t} \right]$$



### Příklad 2.29

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo "Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (viz. obr). Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr  $R=2,7 \text{ m}$ . Jakou nejmenší rychlostí  $v$  mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt? tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  [ $v = \sqrt{gR} = 5,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]



### Příklad 2.30

Kotoučová pila na kovy má průměr kotouče 570 mm a řeznou rychlost  $15 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ . Jakou frekvenci otáčení má kotouč pily? [ $f = \frac{v}{\pi d} = 0,139 \text{ Hz}$ ]

**Příklad 2.31**

Průměr kola traktoru je  $d = 1,2$  m.

Určete úhlovou rychlost kola  $\omega$ , jede-li traktor rychlostí  $v = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   $\left[ \omega = \frac{2v}{d} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

**Příklad 2.32**

Setrvačnick se otáčí s frekvencí  $n = 1500 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ . Brzděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas  $t_0 = 30$  s od začátku brzdění. Určete

a) úhlové zrychlení  $\varepsilon$   $\left[ \varepsilon = -\frac{2\pi n}{60t_0} = -\frac{5}{3}\pi \text{ s}^{-2} = -5,24 \text{ s}^{-2} \right]$

b) počet otáček  $N$ , které vykoná od začátku brzdění až do zastavení  $\left[ N = \frac{nt_0}{120} = 375 \text{ ot} \right]$

# Kapitola 3

## Dynamika

### Příklad 3.1

Loď se vlivem odporu prostředí pohybovala po jezeře přímočaře zpomaleně, velikost její rychlosti je popsána vztahem  $v = c^2(t - t_z)^2$ ,  $c > 0$ ,  $0 \leq t \leq t_z$ , kde  $c$  je konstanta a  $t_z$  je čas, kdy se loď zastavila. Vypočítejte, jak závisí odporová síla  $F_o$ , která loď zabrzdila, na rychlosti.  $[F_o = 2mc\sqrt{v}]$

### Příklad 3.2

Určete, jakou silou působí na kolejnici následkem rotace Země vlak hmotnosti  $m = 500$  tun, jedoucí rychlostí  $v' = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  po poledníku od severu k jihu na severní polokouli v místě zeměpisné šířky  $\varphi = 50^\circ$ .  $\left[2 m v' \frac{2\pi}{T} \sin \varphi = 1114,2 \text{ N}\right]$

### Příklad 3.3

Na svisle postavenou pružinu umístíme kuličku o hmotnosti  $m = 0,1$  kg. Pružinu tím stlačíme o vzdálenost  $\Delta s = 2$  mm. Pružinu dále stlačíme o  $s_1 = 15$  cm a náhle pustíme. Do jaké výšky pružina kuličku kolmo vzhůru vystřelí? Hmotnost pružiny můžeme zanedbat.  $\left[h = \frac{1}{2} \frac{s_1^2}{\Delta s}\right]$

### Příklad 3.4

Částice o hmotnosti  $m_1$  je umístěna v počátku souřadné soustavy, částice o hmotnosti  $m_2$  ve vzdálenosti  $l$  na ose  $x$ . Částice se vzájemně přitahují silou konstantní velikosti  $F$ . Vypočítejte

a) v jakém čase  $t_s$  se částice srazí  $\left[t_s = \sqrt{\frac{2lm_1m_2}{F(m_1 + m_2)}}\right]$

b) na jakém místě  $x_s$  se částice srazí  $\left[x_s = \frac{lm_2}{m_1 + m_2}\right]$

c) jakou vzájemnou rychlostí  $v_s$  se částice srazí  $\left[v_s = \sqrt{\frac{2lF(m_1 + m_2)}{m_1m_2}}\right]$

### Příklad 3.5

Těleso se dává do pohybu působením síly  $F=0,02$  N a za první čtyři sekundy svého pohybu urazí dráhu  $s = 3,2$  m. Síla působí po celou dobu pohybu tělesa. Určete

a) Jaká je hmotnost tělesa  $m$   $\left[m = \frac{Ft^2}{2s} = 0,05 \text{ kg}\right]$

b) jakou rychlost  $v$  má na konci páté sekundy svého pohybu?  $\left[v = \frac{F}{m} t = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

### Příklad 3.6

Železniční vagón se pohybuje po vodorovné přímé trati. Brzdíme jej silou, která se rovná jedné desetíně jeho tíhy. V okamžiku začátku brzdění má vagón rychlost  $v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vypočítejte

- a) čas  $t_1$  měřený od začátku brzdění za který se vagón zastaví  $\left[ t_1 = \frac{10v_0}{g} = 20,4 \text{ s} \right]$   
 b) dráhu  $s$ , kterou urazí od začátku brzdění do zastavení.  $\left[ s = \frac{5v_0^2}{g} = 203,8 \text{ m} \right]$

### Příklad 3.7

Na vozík působí stálá vodorovná síla velikosti  $F$ . Z vozíku vypadává písek otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype  $\mu$  písku. V čase  $t = 0$  byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem  $M$ .

- a) určete zrychlení vozíku  $\left[ a = \frac{F}{M - \mu t} \right]$   
 b) určete okamžitou rychlost vozíku  $\left[ v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{M}{M - \mu t} \right]$

### Příklad 3.8

Z cisternového vagónu, který se pohybuje po vodorovných kolejích rychlostí  $v_0 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , vytéká kolmo na směr pohybu vozu přepravovaná voda stálou rychlostí  $k = 100$  litrů za sekundu. Na vagón působí lokomotiva stálou tažnou silou  $F = 1000 \text{ N}$ . Jaké rychlosti  $v$  vagón dosáhne za  $t = 10$  minut? Počáteční hmotnost vagónu s vodou je  $m_0 = 120$  tun, hmotnost prázdného vagónu je 40 tun, hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

$$\left[ v = \frac{F}{\rho_v k} \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - \rho_v k t} \right) + v_0 = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 64,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \right]$$

### Příklad 3.9

Vhodíme-li malou kuličku (brok) do vazké kapaliny, např. oleje, bude její pohyb brzdit třecí (Stokesova) síla  $F_S$ , její velikost je úměrná rychlosti pohybu a můžeme ji vyjádřit vzorcem  $F_S = -kv$ ,  $k > 0$ . Vypočítejte závislost rychlosti kuličky o hmotnosti  $m$  na čase, pro  $t = 0$  je její rychlost nulová a vztlak kapaliny můžeme zanedbat.

$$\left[ v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right]$$

### Příklad 3.10

Lano délky  $l_0$  je nataženo na hladké desce stolu. V okamžiku  $t = 0$  visí úsek lana délky  $l$  přes kraj desky a rychlost lana je nulová. V tomto okamžiku začne lano s desky sklouzávat. Určete

- a) jak poroste jeho rychlost s časem s uvážením tření

$$\left[ v(t) = \left( l - l_0 \frac{f}{f+1} \right) \sqrt{\frac{g}{l_0} (f+1)} \sinh \sqrt{\frac{g}{l_0} (f+1)} t \right]$$

- b) jak se bude měnit poloha konce lana s uvážením tření  $\left[ x(t) = \left( l - l_0 \frac{f}{f+1} \right) \left[ \cosh \sqrt{\frac{g}{l_0} (f+1)} t - 1 \right] \right]$

- c) jak poroste jeho rychlost s časem bez uvážení tření  $\left[ v(t) = l \sqrt{\frac{g}{l_0}} \sinh \sqrt{\frac{g}{l_0}} t \right]$

d) jak se bude měnit poloha konce lana bez uvážení tření  $\left[ x(t) = l \left( \cosh \sqrt{\frac{g}{l_0}} t - 1 \right) \right]$

### Příklad 3.11

Svisle zavěšené homogenní vlákno hmoty  $m$ , jehož konec se dotýká rovinné desky, bylo na horním konci uvolněno. Stanovte sílu  $F$ , která působí na desku stolu po dobu pádu vlákna.

$[F = 3G_x, \text{ kde } G_x \text{ je tíha části vlákna již na stůl dopadlého}]$

### Příklad 3.12

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu  $\alpha$  se smýká směrem dolů předmět tak, že jeho rychlost je konstantní. Jakou velikost má koeficient smykového tření mezi předmětem a nakloněnou rovinou?  $[\mu = \tan \alpha]$

### Příklad 3.13

Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze AB a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze BC, na které se zastaví. Určete koeficient tření  $\mu$ . Úhel  $\alpha = 10^\circ$ , dráhy  $AB = s_1 = 1000$  m,  $BC = s_2 = 100$  m.  $\left[ \mu = \frac{s_1 \sin \alpha}{s_2 + s_1 \cos \alpha} = 0,16 \right]$

### Příklad 3.14

Z vrcholu dokonale hladké koule poloměru  $R = 1,5$  m se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod. Předpokládejte, že tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete:

a) vertikální polohu  $h$  místa od vrcholu koule, ve kterém opustí povrch koule,  $\left[ h = \frac{R}{3} = 0,5 \text{ m} \right]$

b) jakou dráhu  $s$  do toho okamžiku urazil,  $\left[ s = R \arccos \left( \frac{R-h}{R} \right) = 1,26 \text{ m} \right]$

c) velikost rychlosti  $v$ , se kterou opustí povrch koule.  $\left[ v = \sqrt{2gh} = 3,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

### Příklad 3.15

Určete nejmenší koeficient smykového tření  $\mu$  mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčkou poloměru  $r = 200$  m rychlostí  $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\left[ \mu > \frac{v^2}{rg} = 0,39 \right]$

### Příklad 3.16

Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svislé rovině a přechází v kruhovou smyčku o poloměru  $r$ . (Je to jako cirkusová atrakce, která se jezdí na kole - z jaké výšky je třeba vyjízdet)

Z jaké výšky  $h$  musíme spustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl?  $\left[ h = \frac{5}{2}r - \frac{v_0^2}{2g} \right]$



# Kapitola 4

## Hybnost, práce, výkon, energie

### Příklad 4.1

Dvě loďky plují na klidné (neproudící) vodě proti sobě rovnoběžným směrem. Když se míjejí, vymění si vzájemně stejně těžký pytel hmotnosti  $M=50$  kg. Následkem toho se druhá loďka zastaví a první se pohybuje dále v původním směru rychlostí  $u_1 = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Stanovte rychlosti  $v_1$  a  $v_2$  loďek před tím, než si vyměnily pytle. Hmotnosti loďek i s pytle jsou  $m_1=1000$  kg,  $m_2=500$  kg.

$$\left[ v_1 = \frac{u_1 m_1 (M - m_2)}{M(m_1 + m_2) - m_1 m_2} = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right] \quad \left[ v_2 = \frac{m_1 M u_1}{M(m_1 + m_2) - m_1 m_2} = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

### Příklad 4.2

Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak hmotnosti  $m=300$  t, pohybující se po vodorovné trati, zvětšil svou rychlost z  $v_1 = 36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  na  $v_2 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ? Neuvažujeme ztráty třením a vliv odporu vzduchu.

$$\left[ A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 18,75 \text{ MJ} \right]$$

### Příklad 4.3

Vypočítejte práci proměnné síly  $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$  po dráze dané parametrickými rovnicemi  $x = t$ ,  $y = t^2$  (parabola) z bodu  $A_1(1, 1)$  do bodu  $A_2(-1, 1)$ . (Síla je zadána v newtonech)  $\left[ A = \frac{14}{15} \text{ J} \right]$

### Příklad 4.4

Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů? Gravitační pole pokládejte za homogenní, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .  $\left[ \frac{mgh}{\Delta t} = 98,1 \text{ MW} \right]$

### Příklad 4.5

Na ocelovou podložku upustíme z výšky  $h = 1$  m dvě ocelové koule. Horní koule má hmotnost  $m_1=50$  g, dolní  $m_2 = 300$  g.

- a) Do jaké výšky  $h_1$  se odrazí horní (lehčí) koule?  $\left[ h_1 = \left( \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h = 5,9 \text{ m} \right]$
- b) Do jaké výšky  $h_2$  se odrazí dolní (těžší) koule?  $\left[ h_2 = \left( \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h = 0,18 \text{ m} \right]$
- c) Pro jaký poměr hmotností  $k = m_2/m_1$  vyskočí horní koule nejvýše?  $[k \rightarrow \infty]$
- d) Jaká je tato maximální výška?  $[9h = 9 \text{ m}]$

### Příklad 4.6

Částice  $\alpha$  (jádro hélia  ${}^4\text{He}$ ) se ve srážkovém experimentu odrazila od neznámého atomového jádra. Při

srážce ztratila tato částice 75% své kinetické energie. Srážka byla pružná a probíhala po přímce.

Jakou hmotnost  $M$  má neznámé atomové jádro?

$$[M = 3m]$$

#### Příklad 4.7

Člověk o hmotnosti  $m=75$  kg stojí na loďce o délce  $l= 2$  m a hmotnosti  $M=25$  kg. O jakou vzdálenost  $s_c$  se posune vzhledem ke břehu, když přejde z jednoho konce loďky na druhý? Předpokládejte, že odpor vody je možné zanedbat.

$$\left[ s = \frac{ML}{m + M} = 0,5 \text{ m} \right]$$

#### Příklad 4.8

Po zachycení střely se poloha těžiště balistického kyvadla zvýší o  $l = 2$  cm. Určete rychlost střely  $v$ . Hmotnost střely je rovna  $m = 20$  g, hmotnost balistického kyvadla je rovna  $M = 10$  kg, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\left[ v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl} = 313,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

#### Příklad 4.9

Střela o hmotnosti  $m = 10$  g byla vypálena do krabice s pískem o hmotnosti  $M = 2$  kg ležící na vodorovné podložce a zasekla se v ní a posunula ji o vzdálenost  $l = 25$  cm. Koefficient smykového tření mezi krabicí a podložkou  $\mu = 0,2$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vypočítejte

a) rychlost střely  $\left[ v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\mu gl} = 199 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

b) dobu pohybu krabice  $\left[ t_z = \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 0,5 \text{ s} \right]$

#### Příklad 4.10

Střela vyletěla z pušky ve vodorovném směru rychlostí o velikosti  $800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jak velkou rychlostí se pohybuje puška při zpětném rázu, je-li hmotnost pušky 400krát větší, než je hmotnost střely?

$$\left[ v_p = -\frac{m_s v_s}{m_p} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

#### Příklad 4.11

Z děla o hmotnosti  $M$ , které se může volně pohybovat po vodorovné zemi byl vystřelen projektil o hmotnosti  $m$ . Vypočítejte směr (elevační úhel  $\alpha'$ ) počáteční rychlosti projektilu, jestliže nastavený elevační úhel děla byl  $\alpha$ .  $\left[ \tan \alpha' = \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \tan \alpha \right]$

#### Příklad 4.12

Vagón o hmotnosti 35 t se pohybuje po přímé trati rychlostí o velikosti  $v_1 = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a narazí na stojící vagón o hmotnosti 21 t. Při nárazu vagónů se vagóny automaticky spolu spojí. Jak velkou společnou rychlostí se budou vagóny pohybovat a jaký bude směr rychlosti?  $[v = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$  Jak velká mechanická

energie se při spojení vagónů změní v jiné formy?  $\left[ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1050 \text{ J} \right]$

#### Příklad 4.13

V obci, kde je povolená maximální rychlost  $v_{max} = 50 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$  přejelo auto slepici. Na silnici jsou vidět stopy po brzdění smykem, které mají délku  $\ell = 39 \text{ m}$  (asi nefunkční ABS), tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Policista vyšetřující nehodu ví, že koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je  $\mu = 0,5$ . Jakou jel automobil rychlostí v okamžiku, než začal brzdit?

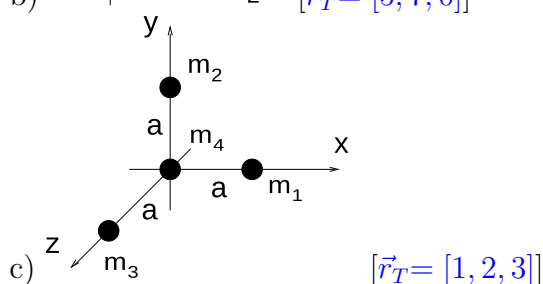
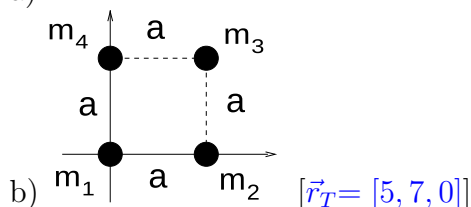
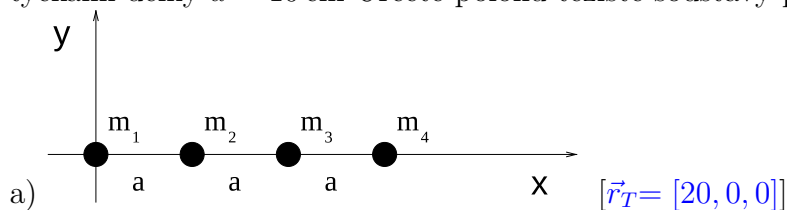
$$\left[ v = \sqrt{2\mu g \ell} = 19,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \right]$$

# Kapitola 5

## Mechanika tuhého tělesa

### Příklad 5.1

Čtyři částice o hmotnostech  $m_1 = 1$  g,  $m_2 = 2$  g,  $m_3 = 3$  g,  $m_4 = 4$  g, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky  $a = 10$  cm. Určete polohu těžiště soustavy pro jednotlivá uspořádání



### Příklad 5.2

Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru  $R = 2$  m.  $\left[ \left[ 0, 0, \frac{3}{8}R \right] = \left[ 0, 0, \frac{3}{4} \right] \text{ m} \right]$

### Příklad 5.3

Určete polohu těžiště tenké tyčky délky  $l$ , jejíž lineární hustota  $\tau$  lineárně vzrůstá od  $\tau_1$  do  $\tau_2$ .

$$\left[ x_T = \frac{l}{3} \frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right]$$

### Příklad 5.4

Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele o výšce  $H$  a poloměru  $R$ .  $\left[ \frac{3}{4}H \right]$

### Příklad 5.5

Do jakého místa je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru  $R$ ?

$$\left[ y_T = \frac{4R}{3\pi} \right]$$

### Příklad 5.6

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního kužele poloměru  $R$  a hmotnosti  $M$ .  $\left[ \frac{3}{10}MR^2 \right]$

### Příklad 5.7

Určete moment setrvačnosti tyčky délky  $\ell$  a hmotnosti  $m$  rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející

a) jejím koncem  $\left[ \frac{1}{3}m\ell^2 \right]$

b) ve vzdálenosti  $\ell/4$  od konce  $\left[ \frac{7}{48}m\ell^2 \right]$

c) středem tyče  $\left[ \frac{1}{12}m\ell^2 \right]$

### Příklad 5.8

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní koule poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$  vzhledem k ose procházející jejím středem.  $\left[ \frac{2}{5}mR^2 \right]$

### Příklad 5.9

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o hmotnosti  $m$ , poloměru  $R$  a výšce  $h$  vzhledem k ose, která je kolmá k jeho geometrické ose a prochází středem válce.  $\left[ J = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 \right]$

### Příklad 5.10

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech  $r_1, r_2$ , výšce  $l$  a hmotnosti  $M$  vzhledem k jeho ose rotační symetrie.  $\left[ \frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2) \right]$

### Příklad 5.11

Závaží o hmotnosti  $m = 1$  kg je zavěšeno na vlákně namotaném na plném ocelovém válci o poloměru  $r = 0,5$  m a délce  $l = 1$  m. Válec se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Za jak dlouho sjede závaží o čtyři metry dolů. Závaží i válec jsou na počátku v klidu, hustota oceli je  $\rho = 7500$  kg · m<sup>-3</sup>

$$\left[ t = \sqrt{\frac{y(2m + \rho\pi r^2 l)}{mg}} = 48,54 \text{ s} \right]$$

### Příklad 5.12

Setrvačné kolo momentu setrvačnosti  $J = 540$  kg · m<sup>2</sup> je z klidu roztáčeno momentem síly, který roste úměrně s časem tak, že v čase  $t_1 = 10$  s dosáhne hodnoty  $M_1 = 100$  N · m. Určete frekvenci, které dosáhne v čase  $t_2 = 72$  s.  $\left[ \frac{M_1 t_2^2}{4\pi J t_1} = 7,65 \text{ Hz} \right]$

### Příklad 5.13

Z bodu  $A$  nakloněné roviny úhlu  $\alpha$  se začne valit beze smyku homogenní váleček. Určete jeho rychlost v bodě  $B$  a čas potřebný k proběhnutí dráhy  $s = \overline{AB}$ .  $\left[ v = 2\sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}} \right] \quad \left[ t = \sqrt{\frac{3s}{g \sin \alpha}} \right]$

#### Příklad 5.14

Dřevěná tyč délky  $l=0,4$  m a hmotnosti  $M=1$  kg se může otáčet kolem osy, která je na tyč kolmá a prochází jejím středem. Na konec tyče narazí střela hmotnosti  $m=0,01$  kg rychlostí  $v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  kolmo na tyč i osu. Určete počáteční úhlovou rychlost pohybu tyče, když v ní střela uvízne.

$$\left[ \omega = \frac{6mv}{l(3m + M)} = 29,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

#### Příklad 5.15

Tágo bouchne do středu kulečnickové koule, takže se tato začne po stole smýkat rychlostí o počáteční velikosti  $v_0$ . Koeficient smykového tření mezi plátnem stolu a koulí je  $\mu$ . Díky tření se koule postupně roztáčí, až se začne pohybovat čistě valivým pohybem (kutálet). Jakou konečnou rychlostí  $v_1$  se bude koule kutálet?  $\left[ v_1 = \frac{5}{7}v_0 \right]$

#### Příklad 5.16

Závaží o hmotnosti  $m$  je zavěšeno na laně podepřeném vodorovnou vzpěrou. Pro úhel, který svírá vzpěra a lano, platí  $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ . Hmotnost lana a vzpěry lze zanedbat. Vypočítejte

- velikost tahové síly,  $T_n$ , kterou je napínáno lano nad vzpěrou  $[T_n = 2mg]$
- velikost tlakové síly  $T_v$ , kterou je namáhána vzpěra  $[T_v = \sqrt{3}mg]$
- velikost tahové síly  $T_p$ , kterou je natahováno lano pod vzpěrou  $[T_p = mg]$

#### Příklad 5.17

Homogenní nosník hmotnosti  $m = 5$  tun a délky  $l = 10$  metrů spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti  $x = 2$  metry od jednoho konce je zatížen hmotností  $m_1 = 1$  tuna. Určete síly reakce v obou podpěrách na koncích nosníku, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$$\left[ N_1 = \frac{mgl + 2m_1g(l - x)}{2l} = 32373 \text{ N} \right] \quad \left[ N_2 = \frac{mg}{2} + m_1g\frac{x}{l} = 26487 \text{ N} \right]$$

#### Příklad 5.18

U stěny je postaven žebřík. Jeho koeficient tření o stěnu je  $f_1 = 0,55$ , o zem  $f_2 = 0,8$ . Určete minimální úhel vzhledem k horizontální rovině, při kterém žebřík nespadne působením vlastní váhy.

$$\left[ \alpha = \arctan \left( \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_2} \right) = 19,29^\circ \right]$$

#### Příklad 5.19

O stěnu domu stojí opřený žebřík délky  $l$ . Koeficient smykového tření mezi žebříkem a zemí je  $\mu$ , tření mezi žebříkem a stěnou můžeme zanedbat. Hmotnost žebříku je  $m$ , hmotnost člověka je  $M$ . Vypočítejte jaký nejmenší může být úhel  $\alpha_{min}$ , aby žebřík nesklouzl  $\left[ \tan \alpha_{min} = \frac{1}{2\mu} \right]$

#### Příklad 5.20

Pro jaký koeficient tření udrží pyramidka tří lahví pohromadě?  $\left[ f_1 \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \right]$

### Příklad 5.21

Plný homogenní kotouč poloměru  $r = 10$  cm kývá kolem osy, která prochází jeho okrajem a je kolmá k ose kotouče. Určete redukovanou délku tohoto kyvadla.  $\left[ l = \frac{3}{2}r = 15 \text{ cm} \right]$

### Příklad 5.22

Rotor elektromotoru s hmotností  $m=110$  kg má moment setrvačnosti  $J = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  a koná  $f=20$  otáček za sekundu. Jak velkou má kinetickou energii?  $[T = 2\pi^2 J f^2 = 15,8 \text{ kJ}]$

### Příklad 5.23

Jakou délku  $\ell_p$  musí mít měděný drát zavěšený za jeden konec, aby se přetrhl vlastní vahou? hustota mědi je  $\rho_{Cu} = 8890 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , mez pevnosti mědi je  $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   $\left[ \ell_p = \frac{\sigma_p}{\rho g} = 2293,29 \text{ m} \right]$

### Příklad 5.24

Lano délky  $l_0 = 15$  m volně visí zavěšené na větvi stromu. Jakou práci  $A$  musí vykonat člověk hmotnosti  $m = 90$  kg, aby vyšplhal po celé délce lana? tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

a) za předpokladu, že lano je tuhé  $[A = mgl_0 = 13243,5 \text{ J}]$

b) modul pružnosti lana je  $E = 83 \text{ MPa}$ , průměr lana je  $d = 11 \text{ mm}$ , hmotnost lana můžeme zanedbat

$$\left[ A = mgl_0 \left( 1 + \frac{mg}{\pi \frac{d^2}{4} E} \right) = 14726,8 \text{ J} \right]$$

### Příklad 5.25

Nosný pilíř z materiálu o hustotě  $\rho$  kruhového průřezu podepírá břemeno tíhy  $G$ . Jaká musí být závislost poloměru pilíře  $r(y)$  na vzdálenosti od břemene, aby normálové napětí  $\sigma_0$  bylo po celé jeho délce konstantní?

$$\left[ r(y) = \sqrt{\frac{G}{\sigma_0 \pi}} e^{\frac{\rho g}{2\sigma_0} y} \right]$$

### Příklad 5.26

Na horní základnu ocelového nosníku ve tvaru komolého kužele z oceli ( $r_1=0,5$  m,  $r_2=1$  m,  $h=5$  m) působí zatížení 10000 tun (zatížení je rovnoměrně rozloženo po povrchu). Určete zkrácení jeho výšky  $h$ . Youngův modul pružnosti oceli je  $E = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ . Neberte v úvahu zkrácení vlastní hmotou nosníku.

$$\left[ \frac{mgh}{E\pi r_1 r_2} = 1,447 \text{ mm} \right]$$

### Příklad 5.27

Homogenní tyč z oceli délky  $l = 10$  m se otáčí frekvencí 60 ot/min. kolem osy procházející koncem tyče kolmo k její ose. Určete prodloužení tyče. Youngův modul pružnosti oceli je  $E = 220 \cdot 10^9$  Pa ,  
 $\rho_{ocel} = 7500$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$   $\left[ \frac{\rho \omega^2 L^3}{3E} = 0,45$  mm  $\right]$

### Příklad 5.28

Kovová tyč délky  $l_0 = 1$  m a průřezu  $S = 4$  cm $^2$  je deformována tahem silou  $F = 800$  N. Přitom se prodlouží o  $10^{-5}$  m. Určete Youngův modul materiálu tyče a podle tabulek odhadněte, z jakého materiálu by tyč mohla být.  $\left[ E = \frac{Fl}{S\Delta l} = 2 \cdot 10^{11}$  Pa, ocel  $\right]$

### Příklad 5.29

Ocelová tyč se dotýká oběma svými konci pevných stěn. Vypočítejte, jakým tlakem působí tyč na stěny, jestliže se její teplota zvýší o 5 $^{\circ}$  C. Youngův modul pružnosti oceli je  $E = 220 \cdot 10^9$  Pa , teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli je  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  K $^{-1}$   $\left[ p = E\alpha\Delta t = 1,32 \cdot 10^7$  Pa  $\right]$



# Kapitola 6

## Mechanika tekutin

### Příklad 6.1

Potrubím o proměnném průřezu protéká  $Q_V = 5$  litrů vody za sekundu. Jak velká je rychlost protékající vody v místech průřezu

- a)  $S_1 = 25 \text{ cm}^2$   $\left[ v_1 = \frac{Q}{S_1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$   
b)  $S_2 = 100 \text{ cm}^2$ ?  $\left[ v_2 = \frac{Q}{S_2} = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

### Příklad 6.2

Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla  $F_0 = 390 \text{ N}$ , na tutéž kouli ponořenou do vody síla  $F_1 = 340 \text{ N}$ . tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- a) jaký je objem koule  $V$  v litrech?  $\left[ V = \frac{F_0 - F_1}{\rho_v g} = 5,1 \text{ l} \right]$   
b) z jaké látky je koule zhotovena? [přibližně odpovídá železu]

### Příklad 6.3

Vypočtete poloměr kulového balónu naplněného vodíkem, který unese 100 kg. Hustota vzduchu je  $\rho_{vz} = 1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota vodíku je  $\rho_{H_2} = 0,0087 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . (při  $0^\circ\text{C}$ ,  $10^5 \text{ Pa}$ )  $\left[ r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\rho_{vz}\pi}} = 2,6 \text{ m} \right]$

### Příklad 6.4

Jakou minimální tloušťku stěny  $h$  musí mít mosazná koule o poloměru  $R = 10 \text{ cm}$ , aby plavala na hladině vody? hustota mosazi je  $\rho_m = 8500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

$$\left[ h = R \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_m - \rho_v}{\rho_m}} \right) = 4,09 \text{ mm} \right]$$

### Příklad 6.5

Klepsydra byly vodní hodiny užívané ve starověku v Egyptě, Číně, Indii, Řecku a Římě. Klepsydra byla nádoba s vodou s otvorem ve spodní části. Byla vyrobena tak, že pokles hladiny při vytékání vody z ní byl rovnoměrný.

- a) navrhnete tvar klepsydry  $[y = \alpha x^4]$   
b) navrhnete poloměr klepsydry aby klepsydra fungovala 24 hodin (otvor ve dně má průměr 1 mm a hladina vody rovnoměrně klesá o 1 cm za hodinu)  $[r = 0,442 \text{ m}]$

### Příklad 6.6

O jaký úhel se odchýlí od vodorovné roviny hladina kapaliny v cisternovém voze, který brzdí se zpomalením  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ?  $\left[ \alpha = \arctan \frac{a}{g} = 26,565^\circ = 26^\circ 33' 54,18'' \right]$

### Příklad 6.7

Jakou práci je třeba vykonat ke zdvižení vertikálně umístěné přehradní rovinné desky (hatě) na úroveň vodní hladiny? Deska je z jedné své strany pod tlakem vody, druhou svou stranou je deska opřena o opory, spodní hranou stojí na dně. Hmotnost desky je  $m=250 \text{ kg}$ , šířka desky  $b=3 \text{ m}$  a hloubka vody  $h=1,5 \text{ m}$ , koeficient tření desky o opory je  $\mu = 0,3$ . Pohyb desky probíhá ve směru kolmém k vodní hladině. Zahražený vodní prostor je velmi velký, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$   $\left[ mgh + \mu \rho g b \frac{1}{6} h^3 = 8645 \text{ J} \right]$

### Příklad 6.8

Voda je umístěna v nádrži tvaru kvádrů s rozměry dna  $5 \times 6 \text{ m}$ , výška hladiny je  $2 \text{ m}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Za jakou dobu vyteče polovina vody malým otvorem na dně s průřezem  $S'=100 \text{ cm}^2$  ?  $\left[ t = \frac{S}{S'} \sqrt{\frac{h_0}{g}} (\sqrt{2} - 1) = 561 \text{ s} \right]$

### Příklad 6.9

Koule plave ve vodě a je do ní ponořena polovinou svého objemu. Jakou práci je třeba vykonat na vytažení koule nad hladinu kapaliny ? Poloměr koule je  $R = 1 \text{ m}$ , hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .  $\left[ A = \frac{5}{12} \pi \rho g R^4 = 12841 \text{ J} \right]$

### Příklad 6.10

Newtonovo vědro. Ve válcové nádobě poloměru  $r = 10 \text{ cm}$  je umístěna kapalina. Nádoba koná kolem své geometrické osy 100 otáček za minutu, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Určete

a) tvar povrchu v nádobě  $\left[ y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2 \right]$

b) o kolik se sníží hladina kapaliny uprostřed nádoby  $\left[ h = \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{g} r^2 = 0,0274 \text{ m} \right]$

### Příklad 6.11

Jakou výslednou silou působí voda na čtvercovou stěnu akvária, je-li délka stěny  $a = 1 \text{ m}$ . hustota vody je  $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .  $\left[ F = \frac{1}{2} \rho g a^3 = 4905 \text{ N} \right]$

### Příklad 6.12

Malý izraelský chlapec hodil do Mrtvého moře o hustotě  $\rho_m = 1240 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  kouli z kůry korkového dubu o hustotě  $\rho = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a poloměru  $R = 10 \text{ cm}$ . Vypočítejte, v jaké hloubce  $h$  pod hladinou se nachází nejnižší část plovoucí koule.

$$\left[ h^3 - 3Rh^2 + 4 \frac{\rho}{\rho_m} R^3 = 0, h = 5,089 \text{ cm} \right]$$

### Příklad 6.13

Injekční stříkačka o vnitřním průměru  $d_s = 10$  mm je zakončena jehlou o vnitřním průměru  $d_j = 1$  mm. Jakou silou musíme působit na píst stříkačky, abychom kapalinu hustoty  $\rho = 1200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a objemu  $\Delta V = 10$  ml vytlačili za čas  $\Delta t = 1$  s? Kapalinu považujte za ideální.  $\left[ F = \frac{2\rho}{\pi} \left( \frac{d_s^4 - d_j^4}{d_s^2 d_j^4} \right) \left( \frac{\Delta V}{\Delta t} \right)^2 = 7,64 \text{ N} \right]$

### Příklad 6.14

Do svislé stěny nádoby jsou vyvrtány dva malé otvory ve výškách  $z_1 = 0,5$  m a  $z_2 = 0,8$  m ode dna.

a) V jaké výšce  $H$  musí být hladina ideální kapaliny, aby tato z obou otvorů dostříkla do stejné vzdálenosti?  $[H = z_1 + z_2 = 1,3 \text{ m}]$

b) Jaká je tato vzdálenost?  $[x = 2\sqrt{z_1 z_2} = 1,26 \text{ m}]$

# Kapitola 7

## Teoretická mechanika

### Příklad 7.1

Popište matematické kyvadlo délky  $l$  pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu.

$$\left[ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \right]$$

### Příklad 7.2

Matematické kyvadlo o hmotnosti  $m$  a délce závěsu  $l$  je volně uchyceno ve vzdálenosti  $r$  od osy kotouče, který rotuje úhlovou rychlostí  $\omega$ . Osy otáčení kotouče a kyvadla jsou rovnoběžné. Popište pohyb kyvadla pomocí Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

$$\left[ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{r\omega^2}{l} \cos(\varphi - \omega t) \right]$$

### Příklad 7.3

Homogenní tenká tyč o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Popište pohyb tyče pomocí Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Jako zobecněnou souřadnici použijte úhel  $\alpha$ .

$$\left[ \ddot{\alpha} + \frac{3g}{2l} \cos \alpha = 0 \right]$$

### Příklad 7.4

Nakloněná rovina s úhlem sklonu  $\alpha$  se pohybuje podél vodorovné přímky rovnoměrně zrychleně tak, že pro polohu jejího nejvyššího bodu platí  $x_n = at^2/2$ .

a) Najděte Lagrangeovu rovnice druhého druhu pro částici o hmotnosti  $m$ , která může po nakloněné rovině volně bez tření klouzat.  $[\ddot{s} = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha]$

b) Pro jaký úhel  $\alpha$  může setrvávat částice na nakloněné rovině v klidu?  $[\tan \alpha = a]$

### Příklad 7.5

Dvě malé kuličky o hmotnostech  $m$  a  $M$  jsou spojeny provázkem délky  $l$ , jehož hmotnost můžeme zanedbat, provlečeným otvorem ve stole. Kulička o hmotnosti  $m$  klouže bez tření po vodorovné, dokonale hladké desce stolu. Popište pohyb kuliček pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu.

$$\left[ \ddot{r} - \frac{m}{m+M} r \dot{\varphi}^2 + \frac{Mg}{m+M} = 0, \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \right]$$

### Příklad 7.6

Korálek o hmotnosti  $m$  je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru  $R$ , po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí  $\omega$ . Najděte Lagrangeovy rovnice druhého druhu popisující pohyb korálku.  $\left[ \ddot{\vartheta} + \sin \vartheta \left( \frac{g}{r} - \omega^2 \cos \vartheta \right) = 0 \right]$

### Příklad 7.7

Na pružinu délky  $l_0$  o tuhosti  $k$  zavěsíme závaží o hmotnosti  $m$ . Pružina může volně otáčet v jedné rovině a její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat. Najděte Lagrangeovy rovnice druhého druhu popisující pohyb tohoto závaží. 
$$\left[ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{2\dot{l}\dot{\varphi}}{l}, \ddot{l} + \frac{k}{m}l = \frac{k}{m}l_0 + l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi \right]$$

### Příklad 7.8

Na pružinu délky  $l_0$  o tuhosti  $k$  zavěsíme závaží o hmotnosti  $m$ . Pružina může volně otáčet v jedné rovině a její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat. Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice popisující pohyb tohoto závaží. 
$$\left[ \dot{l} = \frac{p_l}{m}, \dot{p}_l = \frac{p_\varphi^2}{ml^3} + mg \cos \varphi, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \dot{p}_\varphi = mgl \sin \varphi \right]$$

### Příklad 7.9

Homogenní tenká tyč o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Popište pohyb tyče pomocí Hamiltonových kanonických rovnic. Jako zobecněnou souřadnici použijte úhel  $\alpha$ .

$$\left[ \dot{\alpha} = \frac{3p_\alpha^2}{ml^2}, \dot{p}_\alpha = -\frac{1}{2}mgl \cos \alpha \right]$$

### Příklad 7.10

Korálek o hmotnosti  $m$  je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru  $R$ , po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí  $\omega$ . Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice popisující pohyb korálku. 
$$\left[ \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}, \dot{p}_\vartheta = -mgr \sin \vartheta + mr^2\omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right]$$

# Kapitola 8

## Gravitační pole

### Příklad 8.1

Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii s velkou poloosou  $a_I=421800$  km s periodou  $T_I=1,769$  dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou  $a_M = 2,55 \cdot 10^{-3}$  AU s periodou  $T_M=27,322$  dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země.

$$\text{Astronomická jednotka } 1 \text{ AU je rovna } 149,598 \cdot 10^6 \text{ km} . \quad \left[ \frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2 a_I^3}{T_I^2 a_M^3} = 322 \right]$$

### Příklad 8.2

Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od  $r_{MP}=363300$  km v perigeu do  $r_{MA}=405500$  km v apogeu, perioda oběhu Měsíce kolem Země je  $T_M=27,322$  dne. Umělá družice se pohybuje po eliptické dráze nad rovníkem tak, že v perigeu je  $\rho_{DP}=225$  km nad povrchem Země a v apogeu je  $\rho_{DA}=710$  km. Rovníkový poloměr Země je  $R_Z=6378$  km. Určete periodu oběhu umělé družice  $T_D$ .

$$\left[ T_M \sqrt{\left( \frac{\rho_{DA} + \rho_{DP} + 2R_Z}{r_{MA} + r_{MP}} \right)^3} = 0,0649 \text{ dne} = 1,56 \text{ h} = 1 \text{ h } 34 \text{ min} \right]$$

### Příklad 8.3

Jupiterův měsíc Ganymed obíhá po trajektorii s velkou poloosou  $a_G=1070000$  km s periodou  $T_G=7,15$  dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou  $a_M=384400$  s periodou  $T_M=27,32$  dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země.  $\left[ \frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2 a_G^3}{T_G^2 a_M^3} = 315 \right]$

### Příklad 8.4

V jaké vzdálenosti od středu Země  $r_1$  je na spojnici Země-Měsíc velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti  $m$  nulová? Vzdálenost Země-Měsíc je  $d$ , pro hmotnost Měsíce použijte  $M_M = M_Z/81$ .

$$\left[ r_1 = \frac{9}{10}d \right]$$

### Příklad 8.5

Popíšeme pohyb stacionární družice Země, hmotnost Země je rovna  $M_z = 5,983 \cdot 10^{24}$  kg , střední poloměr Země je roven  $R_z = 6,373 \cdot 10^6$  m , gravitační konstanta je rovna  $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup> · kg<sup>-2</sup> . vypočítejte

a) vzdálenost  $h$  stacionární družice od povrchu Země  $\left[ \sqrt[3]{\frac{\varkappa M_z T^2}{4\pi^2}} - R_z = 35889 \text{ km} \right]$

b) oběžnou rychlost  $v$  této družice  $\left[ \sqrt[6]{\frac{4\pi^2 \varkappa^2 M_z^2}{T^2}} = 3073 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

**Příklad 8.6**

Máme nekonečně dlouhou přímku o délkové hustotě  $\mu$ . Vypočítejte

- a) intenzitu gravitačního pole v kolmé vzdálenosti  $r > 0$  od přímky  $\left[ K = -\frac{2\kappa\mu}{r} \right]$   
 b) potenciál gravitačního pole v kolmé vzdálenosti  $r > 0$  od přímky  $[\varphi = 2\kappa\mu \ln r + C]$

**Příklad 8.7**

Máme homogenní tenkou kruhovou desku o poloměru  $a$  a hmotnosti  $M$ . Vypočítejte

- a) potenciál gravitačního pole ve vzdálenosti  $x > 0$  v ose desky  $\left[ \varphi(x) = -\frac{2\kappa M}{R^2} \left( \sqrt{x^2 + R^2} - |x| \right) \right]$   
 b) intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti  $x > 0$  v ose desky  $\left[ K_x = \frac{2\kappa M}{R^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) - \text{sign}(x) \right]$

**Příklad 8.8**

Najděte takovou vzdálenost  $h$ , aby ve výšce  $h$  nad povrchem Země a v hloubce  $h$  pod povrchem Země byla gravitační síla stejná.  $\left[ \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R_z \right]$

**Příklad 8.9**

Mějme hmotné těleso v podobě protáhlé homogenní tyče hmotnosti  $M$  a délky  $l$  ležící v ose  $x$ . Ve vzdálenosti  $x_0$  od středu tyče leží na ose  $x$  částice hmotnosti  $m$ . Určete gravitační sílu, která na částici

působí působící.  $\left[ F = -\frac{\kappa m M}{x_0^2 - \frac{l^2}{4}} \right]$

**Příklad 8.10**

Určete gravitační zrychlení ve výšce  $h = 20$  km nad zemským povrchem. gravitační konstanta je rovna  $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ , hmotnost Země je rovna  $M_z = 5,983 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , střední poloměr Země je

roven  $R_z = 6,373 \cdot 10^6 \text{ m}$   $\left[ g = \frac{\kappa M_z}{(R_z + h)^2} = 9,767 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \right]$

# Kapitola 9

## Elektřina a magnetismus

### Příklad 9.1

Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě, který leží uprostřed mezi dvěma náboji  $Q_1=+50$  nC a  $Q_2=+70$  nC, které jsou od sebe vzdálené  $r = 20$  cm. Náboje jsou v petroleji, permitivita petroleje je rovna  $\varepsilon_p = 2\varepsilon_0$ , permitivita vakua je  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F  $\cdot$  m<sup>-1</sup>  $\left[ \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left( \frac{Q_2 - Q_1}{r^2} \right) = 8,983 \cdot 10^3$  V  $\cdot$  m<sup>-1</sup>  $\right]$

### Příklad 9.2

Tenká kruhová deska o poloměru  $R$  je elektricky nabitá s konstantní plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Vypočítejte

- a) potenciál elektrického pole v ose desky  $\left[ \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \sqrt{x^2 + R^2} - |x| \right) \right]$   
b) intenzitu elektrického pole v ose desky  $\left[ \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \text{sign}(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right]$   
c) intenzitu elektrického pole v ose desky pro  $x \ll R$   $\left[ \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(x) \right]$

### Příklad 9.3

Dvě velmi malé kuličky, z nichž každá má hmotnost  $m = 3 \cdot 10^{-6}$  kg, jsou ve vakuu zavěšeny na velmi tenkých vláknech dlouhých  $l=0,05$  m a visících ze společného bodu. Oběma kuličkám byl udělen stejný velký záporný náboj. Kuličky se odpuzují tak, že vlákna na nichž visí, jsou odchýlena od svislého směru o úhel  $\alpha = 30^\circ$ . Najděte velikost nábojů. Celá soustava je umístěna v gravitačním poli, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81$  m  $\cdot$  s<sup>-2</sup>, permitivita vakua je  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F  $\cdot$  m<sup>-1</sup>.

$$\left[ q = 4l \sin \alpha \sqrt{\pi \varepsilon_0 m g \tan \alpha} = 2,17 \cdot 10^{-9} \text{ C} \right]$$

### Příklad 9.4

Vypočtete kapacitu kondenzátoru, jehož elektrody jsou tvořeny soustřednými kulovými plochami o poloměrech  $R_1 = 3$  cm a  $R_2 = 4$  cm. Mezi elektrodami je vakuum, permitivita vakua je  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F  $\cdot$  m<sup>-1</sup>.  $\left[ C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1,335 \cdot 10^{-11}$  F = 13,35 pF  $\right]$

### Příklad 9.5

Vypočtete kapacitu válcového kondenzátoru výšky  $h = 20$  cm s poloměry elektrod  $R_1 = 3$  cm a  $R_2 = 4$  cm. Mezi elektrodami je vakuum, permitivita vakua je  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F  $\cdot$  m<sup>-1</sup>

$$\left[ C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 39 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 39 \text{ pF} \right]$$



### Příklad 9.6

Máme deskový kondenzátor se čtvercovými elektrodami o ploše  $S=400 \text{ cm}^2$ , vzdálenost elektrod  $d = 1 \text{ cm}$ . Pomocí elektrické baterie nabijeme na rozdíl potenciálů  $U_0 = 10 \text{ V}$ . Odpojíme baterii a mezi elektrody vložíme dielektrikum o relativní permitivitě  $\varepsilon_r=4$ , které má tloušťku  $1 \text{ cm}$  a má plochu jen  $10 \times 20 \text{ cm}^2$ . učete

a) kapacitu kondenzátoru před vložením dielektrika  $\left[ C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 3,54 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 35,4 \text{ pF} \right]$

b) kapacitu kondenzátoru po vložení dielektrika  $\left[ C = C_0 \frac{1 + \varepsilon_r}{2} = 8,85 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 88,5 \text{ pF} \right]$

c) energii kondenzátoru před vložením dielektrika  $\left[ W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = 1,77 \cdot 10^{-9} \text{ J} \right]$

d) energii kondenzátoru po vložení dielektrika  $\left[ W = \varepsilon_0 \frac{S}{d} U_0^2 \frac{1}{1 + \varepsilon_r} = 7,08 \cdot 10^{-10} \text{ J} \right]$

e) sílu, kterou se přitahují elektrody kondenzátoru po vložení dielektrika  $\left[ F = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{d^2 (1 + \varepsilon_r)} = 7,08 \cdot 10^{-8} \text{ N} \right]$

f) práci na vytažení dielektrika z kondenzátoru  $\left[ A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{d} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon_r} - \frac{1}{2} \right) = -1,062 \cdot 10^{-9} \text{ J} \right]$

### Příklad 9.7

Deskový kondenzátor má elektrody plochy  $S$ , jejich vzájemná vzdálenost je  $d$ . Část plochy  $S_d$  mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem s relativní permitivitou  $\varepsilon_r$ . Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

$$\left[ C = \varepsilon_0 \frac{S - S_d}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S_d}{d} \right]$$

### Příklad 9.8

Vypočítejte kapacitu dvou rovnoběžných vodičů poloměru  $r$  a délky  $l$ , pro vzdálenost jejichž os platí

$$a \gg r \text{ a } l \gg a. \quad \left[ C = \frac{\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{a - R}{R}} \right]$$

### Příklad 9.9

Vypočtete intenzitu elektrického pole ve vakuu kolem nekonečně dlouhé rovnoměrně nabitě niti ve vzdálenosti  $a=5 \text{ cm}$  od niti. Délková (lineární) hustota náboje  $\tau = 0,01 \mu\text{C/m}$ . K řešení využijte Gaussův zákon elektrostatiky. permitivita vakua je  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\left[ E = \frac{\tau l}{\varepsilon_0 2\pi a} = 3595,1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \right]$$

### Příklad 9.10

Odvoďte vztah pro intenzitu elektrického pole podél osy kruhu o poloměru  $R$ , nabitého rovnoměrně nábojem o plošné hustotě  $\sigma$ .

$$\left[ E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \right]$$

### Příklad 9.11

Vodivá koule o poloměru  $R$  je nabitá nábojem  $Q$ . Pro permitivitu koule i jejího okolí platí  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Vypočítejte

a) intenzitu elektrického pole  $E_1$  uvnitř koule  $[E_1 = 0]$

- b) intenzitu elektrického pole  $E_2$  vně koule  $\left[ E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right]$   
 c) potenciál elektrického pole  $\varphi_2$  vně koule  $\left[ \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]$   
 d) potenciál elektrického pole  $\varphi_1$  uvnitř koule  $\left[ \varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right]$

### Příklad 9.12

Vodní kapka vznikla spojením  $N = 6$  stejných kapiček, z nichž každá měla (oproti nekonečnu) potenciál  $\varphi_1 = 1$  kV. Jaký má potenciál  $\varphi_N$  (oproti nekonečnu) nově vzniklá kapka?  $\left[ \varphi_N = N^{\frac{2}{3}} \varphi_1 \right]$

### Příklad 9.13

Elektrické pole je vytvářeno bodovým nábojem  $Q = 1\mu\text{C}$ , který se nachází v počátku souřadné soustavy. Vypočítejte divergenci intenzity tohoto pole v bodě  $[1,1,1]$ . Uveďte kompletní postup výpočtu divergence.  $\left[ \text{div } \vec{E} = 0 \right]$

### Příklad 9.14

Elektrické pole je vytvářeno bodovým nábojem  $Q = 1\mu\text{C}$ , který se nachází v počátku souřadné soustavy. Vypočítejte rotaci intenzity tohoto pole v bodě  $[1,1,1]$ . Uveďte kompletní postup výpočtu rotace.  $\left[ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \right]$

### Příklad 9.15

Magnetické pole je vytvářeno nekonečně dlouhým přímým vodičem protékaným proudem  $I = 1\text{A}$ . Vodič leží na ose  $z$ . Vypočítejte divergenci indukce magnetického pole v bodě  $[1,1,1]$ . Uveďte kompletní postup výpočtu divergence.  $\left[ \text{div } \vec{B} = 0 \right]$

### Příklad 9.16

Magnetické pole je vytvářeno nekonečně dlouhým přímým vodičem protékaným proudem  $I = 1\text{A}$ . Vodič leží na ose  $z$ . Vypočítejte rotaci indukce tohoto pole v bodě  $[1,1,1]$ . Uveďte kompletní postup výpočtu rotace.  $\left[ \text{rot } \vec{B} = \vec{0} \right]$

### Příklad 9.17

Vypočítejte indukci magnetického pole buzeného dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe  $a = 10$  cm, kterými teče proud  $I = 2$  A stejným směrem, ve vzdálenosti  $a_1 = 4$  cm od prvního na společné kolmé spojnici obou vodičů. Vodiče jsou umístěny ve vakuu, permeabilita vakua je rovna  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .  $\left[ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a - a_1} \right) = 3,333 \cdot 10^{-6} \text{ T} \right]$

### Příklad 9.18

Na obvodu kotouče s poloměrem  $r = 10$  cm je rovnoměrně rozložen náboj  $Q = 10^{-8}$  C. Kotouč se otáčí kolem osy procházející jeho středem frekvencí  $f = 100$  Hz. Vypočítejte velikost intenzity magnetického pole  $H$  ve středu kotouče.  $\left[ H = \frac{fQ}{2r} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \right]$

**Příklad 9.19** Z bronzové desky o tloušťce  $h=1$  mm s rezistivitou  $\rho_R=0,17 \mu\Omega \cdot \text{m}$  vyřezeme rovinný prstenec ve tvaru mezikruží s vnitřním poloměrem  $r_1=10$  cm a vnějším poloměrem  $r_2=50$  cm.

Jaký bude odpor tohoto prstence když:

a) prstenec radiálně rozřízneme a přívody budou okraje řezu,  $\left[ R = \frac{2\pi\rho}{h} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 663,7 \cdot 10^{-6} \Omega \right]$

b) přívody proudu budou obě ohraničující kružnice.  $\left[ R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1} = 43,55 \cdot 10^{-6} \Omega \right]$

### Příklad 9.20

Měděným válcovým vodičem o průměru  $d=3,2$  mm prochází stálý elektrický proud  $I=5$  A. Předpokládejte, že na vedení proudu se podílí jeden elektron z každého atomu mědi.

molární hmotnost mědi je  $M_{Cu} = 63,5 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ , hustota mědi je  $\rho_{Cu} = 8890 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , Avogadrova konstanta je rovna  $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ , náboj elektronu je  $e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Určete

a) proudovou hustotu ve vodiči  $\left[ j = \frac{4I}{\pi d^2} = 6,2 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \right]$

b) unášivou rychlost volných elektronů  $\left[ v = \frac{4IM_{Cu}}{\pi d^2 e N_A \rho_{Cu}} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

### Příklad 9.21

Měděným drátem o poloměru  $R$  protéká konstantní proud  $I$ , jehož proudová hustota je v celém průřezu drátu konstantní. Určete:

a) hustotu energie magnetického pole uvnitř drátu ve vzdálenosti  $r$  od jeho osy  $\left[ w = \frac{1}{8} \frac{\mu I^2 r^2}{\pi^2 R^4} \right]$

b) celkovou energii magnetického pole uvnitř drátu délky  $a$   $\left[ W_a = \frac{\mu I^2 r^2}{16\pi} \right]$

c) vlastní indukčnost drátu délky  $a$ , způsobenou magnetickým tokem uvnitř drátu  $\left[ L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu a}{8\pi} \right]$

### Příklad 9.22

Vypočítejte magnetickou indukci nekonečně dlouhého přímého vodiče pomocí Biotova – Savartova

zákona.  $\left[ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{k} \right]$

### Příklad 9.23

Vypočítejte velikost magnetické indukce ve vzdálenosti  $r=10$  cm od středu nekonečně dlouhého přímého vodiče poloměru  $R=5$  mm, protékaného proudem  $I = 1$  A. Vodič je umístěn ve vakuu, permeabilita vakua

je rovna  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$   $\left[ B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = 2 \mu\text{T} \right]$

### Příklad 9.24

Určete vlastní indukčnost toroidální cívky, kterou protéká proud  $I$ . Počet závitů cívky je  $n$ .

$$\left[ L = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

### Příklad 9.25

Obdélníkovou smyčkou o stranách  $b=10$  cm,  $a=20$  cm protéká proud  $I_1=10$  A. V rovině smyčky ve vzdálenosti  $c=5$  cm od delší strany je umístěn dlouhý přímý vodič protékaný proudem  $I_2=10$  A. Stanovte velikost a směr výsledné síly působící na smyčku, umístěnou ve vakuu.

$$\left[ F = \frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c+b} \right) = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ N} \right]$$

### Příklad 9.26

Vodičem odporu  $R=5 \Omega$  prošel elektrický náboj  $Q=40$  C. Určete, jak velká práce tím byla vykonána, jestliže proud protékající vodičem klesal exponenciálně až na nulu tak, že každých  $\tau=16$  s se zmenšil na polovinu?  $\left[ \frac{RQ^2}{2\tau} \ln 2 = 173 \text{ J} \right]$

### Příklad 9.27

Máte k dispozici zdroj elektromotorického napětí  $U = 12$  V a drát z konstantanu o průměru  $d = 0,5$  mm a rezistivitě  $\rho = 5 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ . Jakou délku tohoto drátu potřebujete na zhotovení topné spirály o výkonu  $P = 10$  W?  $\left[ l = \frac{\pi d^2 U^2}{4\rho P} = 1,67 \text{ mm} \right]$

### Příklad 9.28

Kabelem o délce  $l = 100$  km protéká proud  $I = 400$  A. Jakou hybnost mají elektrony v tomto kabelu? náboj elektronu je  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  C, hmotnost elektronu je  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg

$$\left[ p = \frac{I l m_e}{q_e} = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ kg} \right]$$

### Příklad 9.29

Částice o hmotnosti  $m$  a náboji  $q$  se nachází ve zkříženém homogenním elektrickém a magnetickém poli,  $\vec{B} = (0, 0, B_0)$ ,  $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$ . V čase  $t = 0$  platí  $\vec{v} = \vec{v}_0 = (0, 0, 0)$  a  $\vec{r} = \vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ . Vypočítejte

a) časovou závislost rychlosti  $\left[ \vec{v} = \frac{E_0}{B_0} \left( \sin \frac{qB_0}{m} t, \cos \frac{qB_0}{m} t - 1, 0 \right) \right]$

b) časovou závislost polohového vektoru  $\left[ \vec{r} = \frac{E_0 m}{q B_0^2} \left( 1 - \cos \frac{qB_0}{m} t, \sin \frac{qB_0}{m} t - \frac{qB_0}{m} t, 0 \right) \right]$

### Příklad 9.30

Na vodorovných vodivých kolejnicích s roztečí  $h$  je v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí  $B$  kolmou na kolejnice, umístěn vodivý jezdec o hmotnosti  $m$ , který se po kolejnicích může volně bez tření pohybovat. Vypočítejte, jak se bude s časem měnit rychlost pohyblivé spojky, pokud v čase  $t = 0$  ke kolejnicím připojíme zdroj napětí o velikosti  $U$ . Celkový elektrický odpor obvodu je  $R$ . Rychlost jezdce v čase  $t = 0$  je nulová.  $\left[ v = \frac{U}{Bh} \left( 1 - e^{-\frac{B^2 h^2}{mR} t} \right) \right]$

### Příklad 9.31

V homogenním magnetickém poli  $\vec{B}$  kolmém k nákrešně, se rychlostí  $\vec{v}$  pohybuje po dvou rovnoběžných

vodivých kolejnicích vodič. Jaký proud protéká odporem  $R=10\ \Omega$ , je-li  $v = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $l = 0,1\ \text{m}$ ,  $B = 0,1\ \text{T}$ ?  
(Magnetické pole vytvořené proudem zanedbejte.)  $\left[ I = \frac{Blv}{R} = 10^{-3}\ \text{A} \right]$

### Příklad 9.32

Vodivá kruhová smyčka o poloměru  $\frac{a}{2}$  a elektrickém odporu  $R$  je umístěna v homogenním časově proměnném magnetickém poli s indukcí  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t$ . Indukce je kolmá na plochu smyčky. Vypočítejte proud indukovaný ve smyčce.  $\left[ I = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4R} \sin \omega t \right]$

# Kapitola 10

## Harmonické kmity

### Příklad 10.1

Doba kmitu harmonického pohybu je  $T = 3,14$  s, v okamžiku  $t = 0$  je výchylka  $x_0 = 10$  cm a rychlost  $v_0 = 0,4$  m · s<sup>-1</sup>. Určete

a) amplitudu  $A$   $\left[ A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0,22 \text{ m} \right]$

b) fázovou konstantu  $\varphi_0$   $\left[ \varphi_0 = \arctg \frac{\omega x_0}{v_0} = 0,46 \text{ rad} \right]$

### Příklad 10.2

Částice koná harmonický pohyb. Její maximální rychlost je  $v_0 = 6$  m · s<sup>-1</sup> a maximální zrychlení  $a_0 = 24$  m · s<sup>-2</sup>. Určete

a) úhlovou frekvenci  $\omega$   $\left[ \omega = \frac{a_0}{v_0} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

b) periodu  $T$   $\left[ T = \frac{2\pi v_0}{a_0} = \frac{\pi}{2} \text{ s} = 1,57 \text{ s} \right]$

c) frekvenci  $f$   $\left[ f = \frac{a_0}{2\pi v_0} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz} = 0,64 \text{ Hz} \right]$

d) amplitudu  $x_0$   $\left[ x_0 = \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{3}{2} \text{ m} = 1,5 \text{ m} \right]$

### Příklad 10.3

Těleso visí na pružině a kmitá s periodou  $T = 0,5$  s, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>. O kolik se pružina zkrátí odstraněním tělesa?  $\left[ g \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 6,2 \text{ cm} \right]$

### Příklad 10.4

Na pružnou spirálu zavěsíme na spodním konci závaží hmotnosti značně větší než je hmotnost spirály. Při tom se spirála protáhne o 4 cm. S jakou frekvencí bude soustava kmitat, udělíme-li jí ve svislém směru impuls ?

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_0}} = 2,51 \text{ Hz} \right]$$

### Příklad 10.5

Pozorováním tlumeného harmonického kmitavého pohybu se zjistilo, že po dvou za sebou následujících výchyčkách na stejnou stranu se amplituda kmitů zmenšila o  $6/10$  a že doba kmitu  $T = 0,5$  s. Určete

a) součinitel tlumení  $\delta$   $\left[ \delta = -\frac{\ln \frac{4}{10}}{T} = 1,833 \text{ s}^{-1} \right]$

b) logaritmický dekrement útlumu  $\Lambda$ .  $[\Lambda = \delta T = 0,916]$

### Příklad 10.6

Za jak dlouho se energie kmitavého pohybu ladičky s frekvencí  $f = 435$  Hz zmenší  $n = 10^6$  krát? Jaký je činitel jakosti ladičky? Logaritmický dekrement útlumu je roven  $\Lambda = 8 \cdot 10^{-4}$ .  $\left[ t = \frac{\ln n}{2\Lambda f} = 19,84 \text{ s} \right]$

$\left[ Q = \frac{\pi}{\Lambda} = 3927 \right]$

### Příklad 10.7

Jaká je frekvence netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti  $m = 2$  g, je-li amplituda  $A = 10$  cm a celková energie hmotného bodu  $W = 1$  J?  $\left[ \frac{1}{\pi A} \sqrt{\frac{W}{2m}} = 50,35 \text{ Hz} \right]$

### Příklad 10.8

Jaký je logaritmický dekrement útlumu  $\Lambda$  tlumeného harmonického oscilátoru, jestliže za čas  $t = 10$  s trvání pohybu hmotný bod ztratí 50 % své mechanické energie. Perioda tlumeného pohybu je  $T = 2$  s.  $\left[ \frac{\ln 2}{2t} T = 0,0693 \right]$

### Příklad 10.9

Pohybová rovnice vynuceně kmitajícího oscilátoru je  $\ddot{x} + 4\sqrt{2}\dot{x} + 25x = \sin(3t)$ . Určete frekvenci  $\Omega_r$ , při které dojde k rezonanci amplitudy.  $\left[ \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 3 \text{ Hz} \right]$

### Příklad 10.10

Určete dobu kmitu  $T$  kapaliny, která je nalita do trubice tvaru  $U$  tak, že celková délka sloupce kapaliny je  $l = 1$  m, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   $\left[ T = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}} = 1,42 \text{ s} \right]$

### Příklad 10.11

Mobilní telefon spadne do kanálu, který ústí na druhé straně Země. Za jak dlouho se telefon vrátí? střední poloměr Země je roven  $R_z = 6,373 \cdot 10^6$  m, hmotnost Země je rovna  $M_z = 5,983 \cdot 10^{24}$  kg. Hustotu Země budeme pokládat za konstantní, gravitační konstanta je rovna  $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$\left[ t = 2\pi \sqrt{\frac{R_z^3}{\varkappa M_z}} = 5059 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min } 19 \text{ s} \right]$

### Příklad 10.12

Dvě závaží o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  jsou spojena pružinou o tuhosti  $k$ . Vypočítejte periodu kmitů tohoto systému za předpokladu, že na něj nepůsobí vnější síly a že pohyb je jednorozměrný.

$$\left[ T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \right]$$

### Příklad 10.13

Kruhová deska koná ve svislém směru kmitavý harmonický pohyb s amplitudou  $A = 0,75$  m, tíhové zrychlení je rovno  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>. Jaká může být maximální frekvence kmitání desky, aby se předmět volně uložený na desku od ní neoddělil?  $\left[ \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_0}} = 0,575 \text{ Hz} \right]$

### Příklad 10.14

Vodorovná deska koná kmitavý pohyb v horizontálním směru s periodou  $T = 5$  s. Závaží ležící na desce se začne smýkat v okamžiku, kdy amplituda kmitů dosáhne velikosti  $A_0 = 0,5$  m. Jaký je koeficient smykového tření  $\mu$  mezi závažím a deskou?  $\left[ \mu = \frac{4\pi^2 A_0}{T^2 g} = 0,080 \right]$

### Příklad 10.15

Nalezněte amplitudu  $A$  a fázi  $\psi$  výsledného harmonického pohybu  $u = A \sin(\omega t + \psi)$ , který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce se stejnou periodou,  $u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ ,  $u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$  amplitudami  $A_1 = 3$  cm,  $A_2 = 5$  cm a fázemi  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$

$$\left[ \begin{aligned} & \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2} = 7 \text{ cm} \\ & \arcsin \left( \frac{A_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{(A_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2}} \right) = 38,2132^\circ = 38^\circ 12' 47'' \doteq 0,667 \text{ rad} \end{aligned} \right]$$

### Příklad 10.16

Nalezněte amplitudu a fázi výsledného harmonického pohybu  $u = A \cos(\omega t + \varphi)$ , který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce  $u_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $u_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$   $A_1 = A_2 = 5$  cm, fáze  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ .  $\left[ A_1 \sqrt{2[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} = 9,66 \text{ cm} \right]$

$$\left[ \arccos \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2}{\sqrt{2[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} = \arcsin \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\sqrt{2[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \right]$$

### Příklad 10.17

Nalezněte rovnici kmitu, který vznikl složením dvou navzájem kolmých harmonických kmitů  $x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0)$  a  $y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $A_1 = 10$  cm,  $A_2 = 5$ . Dráhu nakreslete. Uveďte název křivky.  $\left[ y = \frac{1}{2}x, \text{ úsečka} \right]$

### Příklad 10.18

Nalezněte rovnici kmitu, který vznikl složením dvou navzájem kolmých kmitů  $x = \sin \omega t$ ,  $y = 4 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ . Uveďte název křivky a dráhu nakreslete.  $\left[ x^2 + \frac{y^2}{4^2} = 1, \text{ elipsa} \right]$

### Příklad 10.19

Hmotný bod se pohybuje v rovině  $xy$  po trajektorii zadané parametrickými rovnicemi  $x = A \cos \omega t$ ,  $y = B \sin \omega t$



- a) Určete tvar trajektorie [elipsa]  
 b) Vypočítejte složky vektoru rychlosti  $[\vec{v} = (-A\omega \sin \omega t, B\omega \cos \omega t)]$   
 c) Vypočítejte velikost vektoru rychlosti  $[v = |\omega| \sqrt{(A \sin \omega t)^2 + (B \cos \omega t)^2}]$   
 d) Vypočítejte složky vektoru zrychlení  $[\vec{a} = (-A\omega^2 \cos \omega t, B\omega^2 \sin \omega t)]$   
 e) Vypočítejte velikost vektoru zrychlení  $[a = \omega^2 \sqrt{(A \cos^2 \omega t)^2 + (B \sin^2 \omega t)^2}]$

### Příklad 10.20

Hmotný bod se pohybuje v rovině  $xy$  po trajektorii zadané parametrickými rovnicemi. Určete rovnice trajektorie  $y = f(x)$  pro

- a)  $x = A \cos \omega t, y = B \cos 2\omega t, \left[ y(x) = \frac{2B}{A^2}x^2 - B \right]$   
 b)  $x = A \cos \omega t, y = B \cos 3\omega t. \left[ y(x) = \frac{4B}{A^3}x^3 - \frac{3B}{A}x \right]$

# Kapitola 11

## Relativita

### Příklad 11.1

Elektron byl urychlen v kondenzátoru, mezi jehož deskami je napětí  $U = 10^6$  V. Určete jeho rychlost. klidová hmotnost elektronu je  $m_{e0} = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg , náboj elektronu je  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  C , rychlost

světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>  $\left[ c \sqrt{1 - \left( \frac{m_{e0}c^2}{eU + m_{e0}c^2} \right)^2} = 0,941 c = 2,82 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>  $\right]$

### Příklad 11.2

Jaké napětí je třeba dle klasické fyziky na urychlení elektronu na rychlost světla?  $\left[ \frac{m_{e0}c^2}{2e} = 256$  kV  $\right]$

Jakou rychlost elektron urychlený tímto napětím skutečně získá? náboj elektronu je  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  C , klidová hmotnost elektronu je  $m_{e0} = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg , rychlost světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>

$$\left[ c \sqrt{1 - \left( \frac{m_{e0}c^2}{eU + m_{e0}c^2} \right)^2} = 0,745c = 2,24 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

### Příklad 11.3

Při srážkách částic (primárního) kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony. Jsou to nestabilní částice se střední dobou života  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  s (v klidové soustavě mionu) a s hmotností  $m = 207 m_e$ . Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blížíící se rychlosti světla. Za střední dobu života  $\tau_0$  se mion rozpadá na elektron a dvě neutrína.

Mion vznikl ve výšce 15 km a má rychlost  $v = 0,9998 c$ . Jakou dráhu urazí mion v klidové soustavě

Země? rychlost světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>  $\left[ \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 32995 \text{ m} \right]$

### Příklad 11.4

Letící objekt vidíme zkrácený ve pohybu na polovinu. rychlost světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>

Vypočítejte rychlost objektu  $\left[ v = \sqrt{\frac{3}{4}} c = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

### Příklad 11.5

Kosmonaut budoucnosti letí v raketě, která se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí 0,8 c. Zadané úkoly splnil za čas  $t_0=1$  hodina palubního času. Jaký čas  $t$  trvalo splnění úkolu pro pozemskou obsluhu?

Výslednou hodnotu vyjádřete v minutách.  $\left[ t = \frac{5}{3}t_0 = 100 \text{ min} \right]$

### Příklad 11.6

Na jeden metr čtvereční zemského povrchu dopadá průměrný výkon  $I=1390$  W (intenzita). Jakou hmotnost ztratí Slunce za jeden rok vlivem vyzařené energie? Vzdálenost Země od Slunce  $R = 149,6 \cdot 10^6$  km, rychlost světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s<sup>-1</sup> .  $\left[ \frac{4\pi R^2 I t}{c^2} = 1,37 \cdot 10^{17} \text{ kg} \right]$

### Příklad 11.7

K Zemi se blíží od Proximy Centauri raketa A rychlostí  $u_1 = 0,9$  c, z opačného směru pak raketa B rychlostí  $u_2 = 0,8$  c. Jakou rychlostí  $u$  se pohybují obě rakety vůči sobě?  $\left[ u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}} = 0,988 c \right]$

### Příklad 11.8

Řidič projel křižovatkou na červenou. Policistovi, který jej zastavil, tvrdí, že prostě jel trochu rychleji a červenou barvu semaforu tedy viděl jako zelenou. Jakou rychlostí by musel jet, aby červené světlo o vlnové délce  $\lambda_c = 700$  nm viděl jako světlo zelené o vlnové délce  $\lambda_z = 550$  nm?  $\left[ v = \frac{\lambda_c^2 - \lambda_z^2}{\lambda_c^2 + \lambda_z^2} \cdot c = 0,24c \right]$

### Příklad 11.9

Vypočítejte, jakou dobu trvá průlet protonu kosmického záření naší Galaxií

a) vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Galaxií  $\left[ \Delta t_G = \frac{d}{c} = 100000 \text{ let} \right]$

b) vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem  $\left[ \Delta t_p = \frac{d E_0}{c E} = 4,93 \text{ minuty} \right]$

Energie protonu je  $E = 10^{10}$  GeV, klidová energie protonu je  $E_0 = 938$  MeV, průměr Galaxie  $d = 100000$  světelných let, rychlost světla ve vakuu je  $c = 3 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s<sup>-1</sup> .

### Příklad 11.10

Dvě částice o stejných klidových hmotnostech  $m_0$  se pohybují po přímce proti sobě tak, že pro velikost rychlosti každé z nich platí  $v = \frac{3c}{5}$ . Jejich srážkou vznikne nová částice. Jaké je její klidová hmotnost  $M_0$ ?

$$\left[ M_0 = \frac{5}{2} m_0 \right]$$

celkem 191 příkladů