Sbírka příkladů

pro předmět

FYZIKA 1 (B1B02FY1)

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Příklad 1.1
Mladý Galileo Galilei při pozorování kyvů lucerny, zavěšené na dlouhém závěsu pisánského kostela (narodil se a studoval v Pise) zjistil, že perioda nezávisí na počáteční výchylce. Domníval se, že závisí na délce kyvadla l, jeho hmotnosti m a tíhovém zrychlení g. Odhadněte závislost dobu kyvu kyvadla t na těchto veličinách pomocí rozměrové analýzy. $\left[t = kl^{\frac{1}{2}}m^0 g^{-\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 1.2
Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek uzkým hrdlem o ploše S z horní do dolní nádobky. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru S mezi nádobami, hustotě zrnek písku ρ a (zřejmě) na tíhovém zrychlení g. Naopak, nezávisí na velikosti zrnek a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ písku v hodinách $\left[\frac{\Delta m}{\Delta t} = kS^{\frac{5}{4}}\rho g^{\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 1.3
Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti M, poloměru R, a jelikož jistě souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě, gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku p v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ($M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, $R_S = 696\ 000$ km) a Zemi ($M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_Z = 6378$ km). $\left[p = k\kappa M^2 R^{-4}\right]$

Příklad 1.4
U strunného hudebního nástroje víme, že frekvence, na které zní konkrétní struna souvisí s její délkou l, silou F, kterou strunu napínáme a tloušťkou struny, kterou můžeme vyjádřit pomocí hmotnosti vztažené na jednotku délky μ. Najděte pomocí rozměrové analýzy vzorec pro frekvenci struny f s využitím veličin l, F a μ. $\left[f = kl^{-1}F^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 1.5 Pomocí rozměrové analýzy určete vzorec pro dráhu tělesa při volném pádu $\left[x = Cgt^2\right]$

Kapitola 2

Kinematika

Příklad 2.1

Země oběhne kolem Slunce přibližně rovnoměrným pohybem po kružnici za 365,25 dní. Jaká je její rychlost vzhledem ke Slunci, je-li střední vzdálenost Země o Slunce $149,6 \cdot 10^6$ km ? $\left[v = \frac{2\pi r}{t} = 29,78 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

Příklad 2.2

Dvě částice se pohybují rychlostmi o vektorech $\vec{v}_1 = (2, 0)$ a $\vec{v}_2 = (0, 3)$. V čase $t = 0$ se nacházely v bodech $\vec{r}_{10} = (-3, 0)$ a $\vec{r}_{20} = (0, -3)$. Určete

a) vektor vzájemné polohy částic $[\vec{r} = (3 - 2t, -3 + 3t)]$

b) čas maximálního sblížení $\left[t_0 = \frac{15}{13}\right]$

c) vzdálenost částic v okamžiku maximálního sblížení $\left[l = \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$

Příklad 2.3

Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu Δt_1. Jakou dobu Δt_n míjí výpravčího n-tý vagón? $[\Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})]$

Příklad 2.4

Student se po přednášce z fyziky vrací pěšky z Dejvic na kolej Strahov a přitom si všimne, že autobus číslo 143 jej v protisměru míjí s intervalem $T_p = 10\text{min } 48$ s, autobus jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_v = 13\text{min } 30$ s. spočítejte

a) interval T ve kterém autobus jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný) $\left[T = \frac{2T_pT_v}{T_v + T_p} = 12 \text{ min}\right]$

b) poměr rychlosti β chůze studenta ku rychlosti autobusu. $\left[\beta = \frac{T_v + T_p}{T_v - T_p} = 9\right]$

Příklad 2.5

Částice se pohybuje přímočaře po ose x podle zákona $x = At + Bt^2$, kde $A = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = 6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Určete

a) časovou závislost okamžité rychlosti $[v(t) = A + 2Bt]$

b) okamžitou rychlost částice v_1 začátkem desáté sekundy $[v = 113 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}]$

c) okamžitou rychlost částice v_2 koncem dvanácté sekundy $[v = 149 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}]$

d) střední rychlost $\bar{v}$ v intervalu mezi těmito okamžiky $[\bar{v} = 131 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}]$

Příklad 2.6

Beruška sedí ve středu kartézských souřadnic, Ferda Mravenec ve vzdálenosti l_F na ose x. V čase $t = 0$ začne Beruška lézt rychlostí v_B v kladném směru osy y a Ferda rychlostí v_F v záporném směru osy x. Najděte

a) vzájemnou vzdálenost $l_{FB}(t)$ jako funkci času $\left[l_{FB} = \sqrt{(x_F - v_F t)^2 + (v_B t)^2}\right]$

b) čas t_n kdy si jsou nejblíže $\left[t_n = \frac{v_F x_F}{v_F^2 + v_B^2}\right]$

c) jejich nejmenší vzdálenost l_n $\left[l_n = \frac{x_F v_B}{\sqrt{v_F^2 + v_B^2}}\right]$

Příklad 2.7

Pohyb částice je určen parametricky jako $x = A_1 t^2 + B_1$, $y = A_2 t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$, $A_2 = 15\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$, $B_1 = 5\ \mathrm{cm}$, $B_2 = -3\ \mathrm{cm}$. Určete

a) vektor rychlosti částice v okamžiku $t = 2\,s$. $[\vec{v} = (80, 60)\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}]$

b) vektor zrychlení částice v okamžiku $t = 2\,s$. $[\vec{a} = (40, 30)\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}]$

Příklad 2.8

Mějme kružnici o poloměru R ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábky ve směru tětiv k obvodu kružnice. Do žlábku vložíme malou kuličku a vypustíme.

a) Určete čas, za který kulička dospěje na okraj kružnice. $\left[t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\right]$

b) Jak tento čas závisí na sklonu žlábku? [čas nezávisí na sklonu žlábku]

Úlohu poprvé řešil v 1. polovině 17.století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu ve své knize *O úměrnosti pohybu.*

Příklad 2.9

Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně $v_1 = 360\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé x_1 =1,8 km ?

$\left[a = \frac{v_1^2}{2x_1} = 2,78\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\right]$

Příklad 2.10

Částice se pohybuje podél osy x tak, že pro její zrychlení platí $a = a_0(1 - e^{-kt})$, kde $a_0 > 0$, $k > 0$ jsou konstanty a t je čas. V čase $t = 0$ platí počáteční podmínky $v(0) = 0, x(0) = 0$. Vypočítejte

a) rychlost částice $v(t)$ jako funkci času $\left[v = a_0 t - \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})\right]$

b) polohu částice $x(t)$ jako funkci času $\left[x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{a_0}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{a_0 t}{k}\right]$

Příklad 2.11

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku $t_1 = 90\,\mathrm{s}$ má hodnotu $a_1 = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete:

a) závislost rychlosti a dráhy na čase, $\left[v = \frac{a_1}{2t_1}t^2\right]$ $\left[\frac{a_1}{6t_1}t^3\right]$

b) rychlost a uraženou dráhu pro čas $t = t_1$, $\left[v(t_1) = \frac{a_1}{2}t_1 = 22{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$ $\left[x(t_1) = \frac{a_1}{6}t_1^2 = 675\,\mathrm{m}\right]$

Příklad 2.12

Student se na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadne pětikoruna. Ihned zapne stopky na mobilním telefonu a změří, že žuchnutí mince o dno uslyší za čas $t = 6,24$ s po vypadnutí mince.
tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, rychlost zvuku ve studni je $c = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Určete, jak hluboká je studna na zámku Zbiroh $\left[h = \frac{c^2}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{g} + \frac{4t}{c}} - \sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2 = 162,8\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 2.13

Člověk stojící ve vzdálenosti $h = 50$ metrů od silnice vidí pošťáka, který po ní jede na kole rychlostí $v_1 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V okamžiku kdy jej spatří, je jejich vzdálenost $s = 200$ metrů.

pod jakým úhlem α musí běžet k silnici rychlostí $v_2 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, aby se s pošťákem setkal? $\left[\sin\alpha = \frac{hv_1}{sv_2}\right]$

Příklad 2.14

Kbelík zavěšený na provázku omotaném kolem rumpálu o poloměru R padá do studny. Jeho dráha je dána vztahem $s = \frac{1}{2}kt^2$

Jaká je velikost zrychlení malého pavoučka o hmotnosti m který sedí na rumpálu? $\left[\sqrt{k^2 + \frac{k^4t^4}{R^2}}\right]$

Příklad 2.15

Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.
V čase t_1=0,2 s se nachází ve výšce y_1=0,544 m.

a) jaká je jeho počáteční rychlost v_0? $\left[v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{1}{2}gt_1 = 3,701\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$

b) jaká je jeho rychlost v_1 v zadané výšce y_1 ? $\left[v_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{1}{2}gt_1 = 1,739\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$

c) o jakou výšku Δy ještě vyplašený pásovec nastoupá ? $[\Delta y = 0,154\ \mathrm{m}]$

Příklad 2.16

Těleso bylo vrženo ze zemského povrchu svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 4,9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Současně z výšky, kterou toto první těleso maximálně dosáhne, začíná padat druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí. Určete čas a výšku, ve které se obě tělesa střetnou, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ $\left[h = \frac{7v_0^2}{32g} = 0,53\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 2.17

Určete počáteční rychlost v_0 tělesa při vrhu svislém dolů z výšky h=122 m, má-li za poslední sekundu svého pohybu urazit polovinu celkové dráhy, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$\left[v_0 = \frac{1}{2t_1}\sqrt{h^2 - 6ght_1^2 + g^2t_1^4} = 44,157\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$

Příklad 2.18

Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Zároveň je z výšky h volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ $\left[h = \frac{2v_0^2}{g} = 1,8\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 2.19

Těleso je vrženo v okamžiku $t = 0$ s svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce h prochází v okamžiku $t_1 = 5$ s směrem vzhůru a v okamžiku $t_2 = 10$ s směrem dolů, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Určete

a) počáteční rychlost tělesa v_0 $\left[v_0 = g \cdot \frac{t_1 + t_2}{2} = 73,57\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$

b) výšku h $\left[h = g \cdot \frac{t_1 t_2}{2} = 245,25\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 2.20 Jakou rychlostí je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky $h = 100$ m, aby dopadlo o čas τ=1 s dříve než při volném pádu? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$$\left[v_0 = \frac{h - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau\right)^2}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau} = g\tau\frac{\sqrt{8hg} - g\tau}{\sqrt{8hg} - 2g\tau} = 11,2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right]$$

Příklad 2.21

Pod jakým elevačním uhlem α musí byt vystřelená střela počáteční rychlostí $v_0 = 500\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, aby zasáhla cíl C vzdálený $x_1 = 20$ km, ve výšce $y_1 = 1$ km? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vypočtenou elevaci vyjádřete ve stupních.

$$\left[(\tan\alpha)_{1,2} = \frac{1}{x_1}\left[\frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{2\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_1\right) - x_1^2}\ \right] = \{63,2^o; 29,7^o\}\right]$$

Příklad 2.22

Fotbalista vykopl míč rychlostí $25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ svisle vzhůru.

a) Do jaké výšky vystoupil za dobu 2 s ? $\left[y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 30\ \mathrm{m}\right]$

b) Za jakou dobu dosáhl míč své největší výšky ? $\left[t_D = \frac{v_{y0}}{g} = 2,5\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 2.23

Kámen je vržen svisle vzhůru o velikosti v_0. Určete, v jaké výšce od vodorovné roviny se velikost rychlosti kamene zmenší dvakrát. Odpor vzduchu zanedbáváme. $\left[y = \frac{3v_0^2}{8g}\right]$

Příklad 2.24

Dopravníkový pás se pohybuje vodorovným směrem rychlostí $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Do jaké vzdálenosti d od konce pásu dopadá transportovaný materiál, padá-li z výšky

h=1,8 m? $\left[d = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1,21 \text{ m}\right]$

Příklad 2.25

Sekundová ručka hodinek je o třetinu delší než minutová. V jakém poměru jsou rychlosti jejich koncových bodů? [80 : 1]

Příklad 2.26

Oběžné kolo turbíny o průměru 1500 mm koná 3600 otáček za minutu

a) Jaká je úhlová rychlost kola? $\left[\omega = 2\pi f = 377 \text{ s}^{-1}\right]$

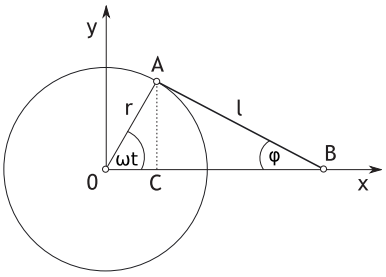
b) Jak velkou rychlost mají body na obvodu kola? $\left[v = \pi d f = 282,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

Příklad 2.27

Jakou frekvenci otáčení musí mít vřeteno soustruhu, aby válec o průměru 40 mm byl obráběn řeznou rychlostí 72 m $\cdot$ min^{-1}? Řezná rychlost odpovídá rychlosti bodu na obvodu válce. $\left[f = \frac{v}{\pi d} = 9,55 \text{ Hz}\right]$

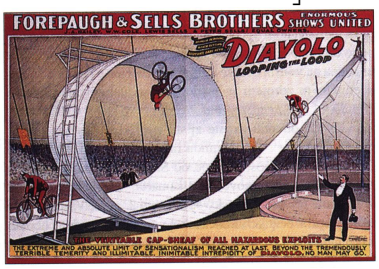
Příklad 2.28

Kloub A pohybuje konstantní úhlovou rychlostí ω po kružnici poloměru r. Bod B leží konci tyče délky l a je nucen se pohybovat podél osy x. Vyjádřete časovou závislost polohy bodu B na ose x. $\left[x_B = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}\right]$



Příklad 2.29

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo "Dare Devil"Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (viz. obr). Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr R=2,7 m. Jakou nejmenší rychlostí v mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ $\left[v = \sqrt{gR} = 5,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$



Příklad 2.30

Kotoučová pila na kovy má průměr kotouče 570 mm a řeznou rychlost 15 m $\cdot$ min^{-1}. Jakou frekvenci otáčení má kotouč pily? $\left[f = \frac{v}{\pi d} = 0,139 \text{ Hz}\right]$

Příklad 2.31

Průměr kola traktoru je d =1,2 m.

Určete úhlovou rychlost kola ω, jede-li traktor rychlostí $v = 2,4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $\left[\omega = \frac{2v}{d} = 4\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]$

Příklad 2.32

Setrvačník se otáčí s frekvencí $n = 1500\ \mathrm{ot}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Brzděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas $t_0 = 30\,\mathrm{s}$ od začátku brzdění. Určete

a) úhlové zrychlení ε $\left[\varepsilon = -\frac{2\pi n}{60 t_0} = -\frac{5}{3}\pi\,\mathrm{s}^{-2} = -5,24\,\mathrm{s}^{-2}\right]$

b) počet otáček N, které vykoná od začátku brzdění až do zastavení $\left[N = \frac{n t_0}{120} = 375\,\mathrm{ot}\right]$

Kapitola 3

Dynamika

Příklad 3.1

Loď se vlivem odporu prostředí pohybovala po jezeře přímočaře zpomaleně, velikost její rychlosti je popsána vztahem $v = c^2(t - t_z)^2, c > 0, 0 \leq t \leq t_z$, kde c je konstanta a t_z je čas, kdy se loď zastavila. Vypočítejte, jak závisí odporová síla F_o, která loď zabrzdila, na rychlosti. $\left[F_o = 2mc\sqrt{v}\right]$

Příklad 3.2

Určete, jakou silou působí na kolejnici následkem rotace Země vlak hmotnosti $m = 500$ tun, jedoucí rychlostí $v' = 72\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ po poledníku od severu k jihu na severní polokouli v místě zeměpisné šířky $\varphi = 50^o$. $\left[2\,m\,v'\,\frac{2\pi}{T}\,\sin\varphi = 1114,2\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 3.3

Na svisle postavenou pružinu umístíme kuličku o hmotnosti $m = 0,1$ kg. Pružinu tím stlačíme o vzdálenost $\Delta s = 2$ mm. Pružinu dále stlačíme o $s_1 = 15$ cm a náhle pustíme. Do jaké výšky pružina kuličku kolmo vzhůru vystřelí? Hmotnost pružiny můžeme zanedbat. $\left[h = \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{\Delta s}\right]$

Příklad 3.4

Částice o hmotnosti m_1 je umístěna v počátku souřadné soustavy, částice o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti l na ose x. Částice se vzájemně přitahují silou konstantní velikosti F. Vypočítejte

a) v jakém čase t_s se částice srazí $\left[t_s = \sqrt{\frac{2lm_1m_2}{F(m_1+m_2)}}\right]$

b) na jakém místě x_s se částice srazí $\left[x_s = \frac{lm_2}{m_1+m_2}\right]$

c) jakou vzájemnou rychlostí v_s se částice srazí $\left[v_s = \sqrt{\frac{2lF(m_1+m_2)}{m_1m_2}}\right]$

Příklad 3.5

Těleso se dává do pohybu působením síly F=0,02 N a za první čtyři sekundy svého pohybu urazí dráhu s =3,2 m. Síla působí po celou dobu pohybu tělesa. Určete

a) Jaká je hmotnost tělesa m $\left[m = \frac{Ft^2}{2s} = 0,05\ \mathrm{kg}\right]$

b) jakou rychlost v má na konci páté sekundy svého pohybu? $\left[v = \frac{F}{m}\,t = 2\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right]$

Příklad 3.6

Železniční vagón se pohybuje po vodorovné přímé trati. Brzdíme jej silou, která se rovná jedné desetině jeho tíhy. V okamžiku začátku brzdění má vagón rychlost $v_0 = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ Vypočítejte

a) čas t_1 měřený od začátku brzdění za který se vagón zastaví $\left[t_1 = \frac{10v_0}{g} = 20,4\ \mathrm{s}\right]$

b) dráhu s, kterou urazí od začátku brzdění do zastavení. $\left[s = \frac{5v_0^2}{g} = 203,8\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 3.7

Na vozík působí stálá vodorovná síla velikosti F. Z vozíku vypadává písek otvorem v podlaze. Za jednotku času se vysype μ písku. V čase $t = 0$ byla rychlost vozíku rovna nule, hmotnost vozíku s pískem M.

a) určete zrychlení vozíku $\left[a = \frac{F}{M - \mu t}\right]$

b) určete okamžitou rychlost vozíku $\left[v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{M}{M - \mu t}\right]$

Příklad 3.8

Z cisternového vagónu, který se pohybuje po vodorovných kolejích rychlostí $v_0 = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, vytéká kolmo na směr pohybu vozu přepravovaná voda stálou rychlostí $k = 100$ litrů za sekundu. Na vagón působí lokomotiva stálou tažnou silou $F = 1000$ N. Jaké rychlosti v vagón dosáhne za $t = 10$ minut? Počáteční hmotnost vagónu s vodou je m_0 =120 tun, hmotnost prázdného vagónu je 40 tun, hustota vody je $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

$$\left[v = \frac{F}{\rho_v k} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \rho_v k t}\right) + v_0 = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 64,8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}\right]$$

Příklad 3.9

Vhodíme-li malou kuličku (brok) do vazké kapaliny, např. oleje,bude její pohyb brzdit třecí (Stokesova) síla F_S, její velikost je úměrná rychlosti pohybu a můžeme ji vyjádřit vzorcem $F_S = -kv, k > 0$. Vypočítejte závislost rychlosti kuličky o hmotnosti m na čase, pro $t = 0$ je její rychlost nulová a vztlak kapaliny můžeme zanedbat. $\left[v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right]$

Příklad 3.10

Lano délky l_0 je nataženo na hladké desce stolu. V okamžiku $t = 0$ visí úsek lana délky l přes kraj desky a rychlost lana je nulová. V tomto okamžiku začne lano s desky sklouzávat. Určete

a) jak poroste jeho rychlost s časem s uvážením tření

$$\left[v(t) = \left(l - l_0 \frac{f}{f+1}\right)\sqrt{\frac{g}{l_0}(f+1)} \sinh \sqrt{\frac{g}{l_0}(f+1)}t\right]$$

b) jak se bude měnit poloha konce lana s uvážením tření $\left[x(t) = \left(l - l_0 \frac{f}{f+1}\right)\left[\cosh \sqrt{\frac{g}{l_0}(f+1)}t - 1\right]\right]$

c) jak poroste jeho rychlost s časem bez uvážení tření $\left[v(t) = l\sqrt{\frac{g}{l_0}} \sinh \sqrt{\frac{g}{l_0}}t\right]$

d) jak se bude měnit poloha konce lana bez uvážení tření $\left[x(t) = l\left(\cosh\sqrt{\frac{g}{l_0}}t - 1\right)\right]$

Příklad 3.11

Svisle zavěšené homogenní vlákno hmoty m, jehož konec se dotýká rovinné desky, bylo na horním konci uvolněno. Stanovte sílu F, která působí na desku stolu po dobu pádu vlákna.
[$F = 3G_x$, kde G_x je tíha části vlákna již na stůl dopadlého]

Příklad 3.12

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká směrem dolů předmět tak, že jeho rychlost je konstantní. Jakou velikost má koeficient smykového tření mezi předmětem a nakloněnou rovinou? [$\mu = \tan\alpha$]

Příklad 3.13

Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze AB a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze BC, na které se zastaví. Určete koeficient tření μ. Úhel $\alpha = 10^o$, dráhy AB=$s_1 = 1000$ m, BC=$s_2 = 100$ m. $\left[\mu = \frac{s_1 \sin\alpha}{s_2 + s_1\cos\alpha} = 0,16\right]$

Příklad 3.14

Z vrcholu dokonale hladké koule poloměru $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod. Předpokládejte, že tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Určete:

a) vertikální polohu h místa od vrcholu koule, ve kterém opustí povrch koule, $\left[h = \frac{R}{3} = 0,5\ \mathrm{m}\right]$

b) jakou dráhu s do toho okamžiku urazil, $\left[s = R\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) = 1{,}26\,\mathrm{m}\right]$

c) velikost rychlosti v, se kterou opustí povrch koule. $\left[v = \sqrt{2\,g\,h} = 3{,}13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

Příklad 3.15

Určete nejmenší koeficient smykového tření μ mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčkou poloměru $r = 200\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 100\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$,tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. $\left[\mu > \frac{v^2}{rg} = 0,39\right]$

Příklad 3.16

Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svislé rovině a přechází v kruhovou smyčku o poloměru r. (Je to jako cirkusová atrakce, která se jezdí na kole - z jaké výšky je třeba vyjíždět)
Z jaké výšky h musíme spustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl? $\left[h = \frac{5}{2}r - \frac{v_0^2}{2g}\right]$

Kapitola 4

Hybnost, práce, výkon, energie

Příklad 4.1

Dvě loďky plují na klidné (neproudící) vodě proti sobě rovnoběžným směrem. Když se míjejí, vymění si vzájemně stejně těžký pytel hmotnosti M=50 kg. Následkem toho se druhá loďka zastaví a první se pohybuje dále v původním směru rychlostí $u_1 = 8,5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Stanovte rychlosti v_1 a v_2 loděk před tím, než si vyměnily pytle. Hmotnosti loděk i s pytlem jsou m_1=1000 kg, m_2=500 kg.

$$\left[v_1 = \frac{u_1 m_1 (M - m_2)}{M(m_1 + m_2) - m_1 m_2} = 9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right] \quad \left[v_2 = \frac{m_1 M u_1}{M(m_1 + m_2) - m_1 m_2} = -1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$$

Příklad 4.2

Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak hmotnosti m=300 t, pohybující se po vodorovné trati, zvětšil svou rychlost z $v_1 = 36\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ na $v_2 = 54\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$? Neuvažujeme ztráty třením a vliv odporu vzduchu.

$$\left[A = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = 18,75\ \mathrm{MJ}\right]$$

Příklad 4.3

Vypočítejte práci proměnné síly $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ po dráze dané parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$ (parabola) z bodu $\mathrm{A}_1(1,1)$ do bodu $\mathrm{A}_2(-1,1)$. (Síla je zadaná v newtonech) $\left[A = \frac{14}{15}\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 4.4

Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů ? Gravitační pole pokládejte za homogenní, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. $\left[\frac{mgh}{\Delta t} = 98,1\ \mathrm{MW}\right]$

Příklad 4.5

Na ocelovou podložku upustíme z výšky h =1 m dvě ocelové koule. Horní koule má hmotnost m_1=50 g, dolní m_2 =300 g.

a) Do jaké výšky h_1 se odrazí horní (lehčí) koule? $\left[h_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = 5,9\ \mathrm{m}\right]$

b) Do jaké výšky h_2 se odrazí dolní (těžší) koule? $\left[h_2 = \left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = 0,18\ \mathrm{m}\right]$

c) Pro jaký poměr hmotností $k = m_2/m_1$ vyskočí horní koule nejvýše? $[k \to \infty]$

d) Jaká je tato maximální výška? $[9h = 9\ \mathrm{m}]$

Příklad 4.6

Částice α (jádro hélia ${}^4_2\mathrm{He}$) se ve srážkovém experimentu odrazila od neznámého atomového jádra. Při

srážce ztratila tato částice 75% své kinetické energie. Srážka byla pružná a probíhala po přímce.

Jakou hmotnost M má neznámé atomové jádro?

$[M = 3m]$

Příklad 4.7

Člověk o hmotnosti m=75 kg stojí na loďce o délce l= 2 m a hmotnosti M=25 kg. O jakou vzdálenost s_c se posune vzhledem ke břehu, když přejde z jednoho konce loďky na druhý? Předpokládejte, že odpor vody je možné zanedbat.

$$\left[s = \frac{ML}{m+M} = 0,5 \text{ m}\right]$$

Příklad 4.8

Po zachycení střely se poloha těžiště balistického kyvadla zvýší o $l = 2$ cm. Určete rychlost střely v. Hmotnost střely je rovna $m = 20$ g, hmotnost balistického kyvadla je rovna $M = 10$ kg,tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\left[v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl} = 313,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$$

Příklad 4.9

Střela o hmotnosti $m = 10$ g byla vypálena do krabice s pískem o hmotnosti $M = 2$ kg ležící na vodorovné podložce a zasekla se v ní a posunula ji o vzdálenost $l = 25$ cm. Koeficient smykového tření mezi krabicí a podložkou $\mu = 0{,}2$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vypočítejte

a) rychlost střely $\left[v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2\mu gl} = 199 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

b) dobu pohybu krabice $\left[t_z = \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 0,5 \text{ s}\right]$

Příklad 4.10

Střela vyletěla z pušky ve vodorovném směru rychlostí o velikosti 800 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jak velikou rychlostí se pohybuje puška při zpětném rázu, je-li hmotnost pušky 400krát větší, než je hmotnost střely?

$$\left[v_p = -\frac{m_s v_s}{m_p} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$$

Příklad 4.11

Z děla o hmotnosti M, které se může volně pohybovat po vodorovné zemi byl vystřelen projektil o hmotnosti m. Vypočítejte směr (elevační úhel α') počáteční rychlosti projektilu, jestliže nastavený elevační úhel děla byl α. $\left[\tan\alpha' = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha\right]$

Příklad 4.12

Vagón o hmotnosti 35 t se pohybuje po přímé trati rychlostí o velikosti $v_1 = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a narazí na stojící vagón o hmotnosti 21 t. Při nárazu vagónu se vagóny automaticky spolu spojí. Jak velikou společnou rychlostí se budou vagóny pohybovat a jaký bude směr rychlosti? $\left[v = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$ Jak velká mechanická energie se při spojení vagónů změní v jiné formy? $\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1+m_2} = 1050 \text{ J}\right]$

Příklad 4.13

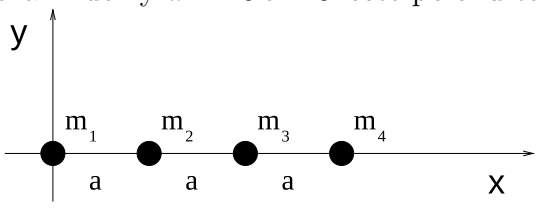
V obci, kde je povolená maximální rychlost $v_{max} = 50\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}}$ přejelo auto slepici. Na silnici jsou vidět stopy po brzdění smykem, které mají délku $\ell = 39$ m (asi nefunkční ABS), tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Policista vyšetřující nehodu ví, že koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je $\mu = 0,5$. Jakou jel automobil rychlostí v okamžiku, než začal brzdit? $\left[v = \sqrt{2\mu g \ell} = 19,5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 70\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}\right]$

Kapitola 5

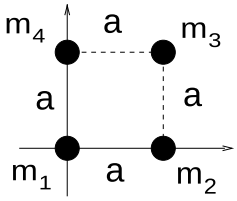
Mechanika tuhého tělesa

Příklad 5.1

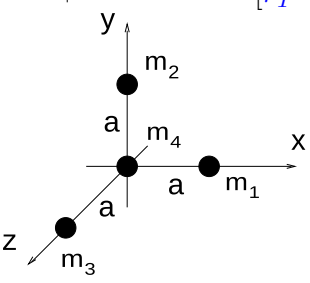
Čtyři částice o hmotnostech $m_1 = 1\,\mathrm{g}$, $m_2 = 2\,\mathrm{g}$, $m_3 = 3\,\mathrm{g}$, $m_4 = 4\,\mathrm{g}$, jsou spojeny nehmotnými pevnými tyčkami délky $a = 10\,\mathrm{cm}$ Určete polohu těžiště soustavy pro jednotlivá uspořádání

a) 

$[\vec{r}_T = [20, 0, 0]]$

b) 

$[\vec{r}_T = [5, 7, 0]]$

c) 

$[\vec{r}_T = [1, 2, 3]]$

Příklad 5.2

Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru $R = 2$ m. $\left[\left[0, 0, \frac{3}{8}R\right] = \left[0, 0, \frac{3}{4}\right]\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 5.3

Určete polohu těžiště tenké tyčky délky l , jejíž lineární hustota τ lineárně vzrůstá od τ_1 do τ_2.
$\left[x_T = \frac{l}{3}\,\frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right]$

Příklad 5.4

Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele o výšce H a poloměru R. $\left[\frac{3}{4}H\right]$

Příklad 5.5

Do jakého místa je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru R?

$\left[y_T = \frac{4R}{3\pi}\right]$

Příklad 5.6

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kužele poloměru R a hmotnosti M. $\left[\frac{3}{10}MR^2\right]$

Příklad 5.7

Určete moment setrvačnosti tyčky délky ℓ a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející

a) jejím koncem $\left[\frac{1}{3}m\ell^2\right]$

b) ve vzdálenosti $\ell/4$ od konce $\left[\frac{7}{48}m\ell^2\right]$

c) středem tyče $\left[\frac{1}{12}m\ell^2\right]$

Příklad 5.8

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose procházející jejím středem. $\left[\frac{2}{5}m\,\mathrm{R}^2\right]$

Příklad 5.9

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o hmotnosti m, poloměru R a výšce h vzhledem k ose, která je kolmá k jeho geometrické ose a prochází středem válce. $\left[J = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2\right]$

Příklad 5.10

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech r_1,r_2, výšce l a hmotnosti M vzhledem k jeho ose rotační symetrie. $\left[\frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2)\right]$

Příklad 5.11

Závaží o hmotnosti $m = 1$ kg je zavěšeno na vlákně namotaném na plném ocelovém válci o poloměru $r = 0,5$ m a délce $l = 1$ m. Válec se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Za jak dlouho sjede závaží o čtyři metry dolů. Závaží i válec jsou na počátku v klidu, hustota oceli je $\rho = 7500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

$\left[t = \sqrt{\frac{y(2m + \rho\pi r^2 l)}{mg}} = 48,54\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 5.12

Setrvačné kolo momentu setrvačnosti $J = 540\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ je z klidu roztáčeno momentem síly, který roste úměrně s časem tak, že v čase $t_1 = 10$ s dosáhne hodnoty $M_1 = 100\mathrm{N \cdot m}$. Určete frekvenci, které dosáhne v čase $t_2 = 72$ s. $\left[\frac{M_1 t_2^2}{4\pi J t_1} = 7,65\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 5.13

Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní válec. Určete jeho rychlost v bodě B a čas potřebný k proběhnutí dráhy $s = \overline{\mathrm{AB}}$. $\left[v = 2\sqrt{\frac{g\,s\,\sin\alpha}{3}}\right]$ $\left[t = \sqrt{\frac{3s}{g\,\sin\alpha}}\right]$

Příklad 5.14

Dřevěná tyč délky l=0,4 m a hmotnosti M=1 kg se může otáčet kolem osy, která je na tyč kolmá a prochází jejím středem. Na konec tyče narazí střela hmotnosti m=0,01 kg rychlostí $v = 200\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ kolmo na tyč i osu. Určete počáteční úhlovou rychlost pohybu tyče, když v ní střela uvízne.

$\left[\omega = \frac{6mv}{l(3m+M)} = 29,1\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]$

Příklad 5.15

Tágo bouchne do středu kulečníkové koule, takže se tato začne po stole smýkat rychlostí o počáteční velikosti v_0. Koeficient smykového tření mezi plátnem stolu a koulí je μ. Díky tření se koule postupně roztáčí, až se začne pohybovat čistě valivým pohybem (kutálet). Jakou konečnou rychlostí v_1 se bude koule kutálet? $\left[v_1 = \frac{5}{7}v_0\right]$

Příklad 5.16

Závaží o hmotnosti m je zavěšeno na laně podepřeném vodorovnou vzpěrou. Pro úhel, který svírá vzpěra a lano, platí $\alpha = 30^o = \frac{\pi}{6}$. Hmotnost lana a vzpěry lze zanedbat. Vypočítejte

a) velikost tahové síly, T_n, kterou je napínáno lano nad vzpěrou $[T_n = 2mg]$

b) velikost tlakové síly T_v, kterou je namáhána vzpěra $\left[T_v = \sqrt{3}mg\right]$

c) velikost tahové síly T_p, kterou je natahováno lano pod vzpěrou $[T_p = mg]$

Příklad 5.17

Homogenní nosník hmotnosti $m = 5$ tun a délky $l = 10$ metrů spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti $x = 2$ metry od jednoho konce je zatížen hmotností $m_1 = 1$ tuna. Určete síly reakce v obou podpěrách na koncích nosníku, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

$\left[N_1 = \frac{mg\,l\ +\ 2m_1g\,(l-x)}{2\,l} = 32373\ \mathrm{N}\right]$ $\left[N_2 = \frac{mg}{2}\ + m_1g\frac{x}{l} = 26487\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 5.18

U stěny je postaven žebřík. Jeho koeficient tření o stěnu je $f_1 = 0,55$, o zem $f_2 = 0,8$. Určete minimální úhel vzhledem k horizontální rovině, při kterém žebřík nespadne působením vlastní váhy.

$\left[\alpha = \arctan\left(\frac{1\ -\ f_1\,f_2}{2\,f_2}\right) = 19,29^o\right]$

Příklad 5.19

O stěnu domu stojí opřený žebřík délky l. Koeficient smykového tření mezi žebříkem a zemí je μ, tření mezi žebříkem a stěnou můžeme zanedbat. Hmotnost žebříku je m, hmotnost člověka je M. Vypočítejte jaký nejmenší může být úhel α_{min}, aby žebřík nesklouzl $\left[\tan\alpha_{min} = \frac{1}{2\mu}\right]$

Příklad 5.20

Pro jaký koeficient tření udrží pyramidka tří lahví pohromadě? $\left[f_1 \geq \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right]$

Příklad 5.21

Plný homogenní kotouč poloměru $r = 10$ cm kývá kolem osy, která prochází jeho okrajem a je kolmá k ose kotouče. Určete redukovanou délku tohoto kyvadla. $\left[l = \frac{3}{2}r = 15 \text{ cm}\right]$

Příklad 5.22

Rotor elektromotoru s hmotností m=110 kg má moment setrvačnosti $J = 2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ a koná f=20 otáček za sekundu. Jak velkou má kinetickou energii? $\left[T = 2\pi^2 J f^2 = 15,8 \text{ kJ}\right]$

Příklad 5.23

Jakou délku ℓ_p musí mít měděný drát zavěšený za jeden konec, aby se přetrhl vlastní vahou? hustota mědi je $\rho_{Cu} = 8890 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, mez pevnosti mědi je $\sigma_p = 200$ MPa, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ $\left[\ell_p = \frac{\sigma_p}{\rho g} = 2293,29 \text{ m}\right]$

Příklad 5.24

Lano délky $l_0 = 15$ m volně visí zavěšené na větvi stromu. Jakou práci A musí vykonat člověk hmotnosti $m = 90$ kg, aby vyšplhal po celé délce lana? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

a) za předpokladu, že lano je tuhé $[A = mgl_0 = 13243,5 \text{ J}]$

b) modul pružnosti lana je $E = 83$ MPa, průměr lana je $d = 11$ mm, hmotnost lana můžeme zanedbat

$$\left[A = mgl_0\left(1 + \frac{mg}{\pi\frac{d^2}{4}E}\right) = 14726,8 \text{ J}\right]$$

Příklad 5.25

Nosný pilíř z materiálu o hustotě ρ kruhového průřezu podepírá břemeno tíhy G. Jaká musí být závislost poloměru pilíře $r(y)$ na vzdálenosti od břemene, aby normálové napětí σ_0 bylo po celé jeho délce konstantní? $\left[r(y) = \sqrt{\frac{G}{\sigma_0\pi}}e^{\frac{\rho g}{2\sigma_0}y}\right]$

Příklad 5.26

Na horní základnu ocelového nosníku ve tvaru komolého kužele z oceli (r_1=0,5 m, r_2=1 m, h=5 m) působí zatížení 10000 tun (zatížení je rovnoměrně rozloženo po povrchu). Určete zkrácení jeho výšky h. Youngův modul pružnosti oceli je $E = 220 \cdot 10^9$ Pa . Neberte v úvahu zkrácení vlastní hmotou nosníku. $\left[\frac{mgh}{E\pi r_1 r_2} = 1,447 \text{ mm}\right]$

Příklad 5.27

Homogenní tyč z oceli délky $l = 10$ m se otáčí frekvencí 60 ot/min. kolem osy procházející koncem tyče kolmo k její ose. Určete prodloužení tyče. Youngův modul pružnosti oceli je $E = 220 \cdot 10^9$ Pa , $\rho_{ocel} = 7500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\left[\frac{\rho\omega^2 L^3}{3E} = 0,45 \text{ mm}\right]$

Příklad 5.28

Kovová tyč délky $l_0 = 1$ m a průřezu $S = 4 \text{ cm}^2$ je deformována tahem silou $F = 800$ N. Přitom se prodlouží o 10^{-5} m. Určete Youngův modul materiálu tyče a podle tabulek odhadněte, z jakého materiálu by tyč mohla být. $\left[E = \frac{Fl}{S\Delta l} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa, ocel}\right]$

Příklad 5.29

Ocelová tyč se dotýká oběma svými konci pevných stěn. Vypočítejte, jakým tlakem působí tyč na stěny, jestliže se její teplota zvýší o 5^o C. Youngův modul pružnosti oceli je $E = 220 \cdot 10^9$ Pa , teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli je $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ $\left[p = E\alpha\Delta t = 1,32 \cdot 10^7 \text{ Pa}\right]$

Kapitola 6

Mechanika tekutin

Příklad 6.1

Potrubím o proměnném průřezu protéká Q_V =5 litrů vody za sekundu. Jak velká je rychlost protékající vody v místech průřezu

a) S_1=25 cm^2 $\left[v_1 = \frac{Q}{S_1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

b) S_2=100 cm^2? $\left[v_2 = \frac{Q}{S_2} = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

Příklad 6.2

Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla $F_0 = 390$ N, na tutéž kouli ponořenou do vody síla $F_1 = 340$ N. tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, hustota vody je $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

a) jaký je objem koule V v litrech ? $\left[V = \frac{F_0 - F_1}{\rho_v g} = 5,1 \text{ l}\right]$

b) z jaké látky je koule zhotovena? [přibližně odpovídá železu]

Příklad 6.3

Vypočtěte poloměr kulového balónu naplněného vodíkem, který unese 100 kg. Hustota vzduchu je ρ_{vz}=1,28 kg.m^{-3}, hustota vodíku je ρ_{H_2}=0,0087 kg.m^{-3}. (při 0^{o}C, 10^5 Pa) $\left[r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\rho_{vz}\pi}} = 2,6 \text{ m}\right]$

Příklad 6.4

Jakou minimální tloušťku stěny h musí mít mosazná koule o poloměru $R = 10$ cm, aby plavala na hladině vody? hustota mosazi je $\rho_m = 8500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hustota vody je $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$\left[h = R\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_m - \rho_v}{\rho_m}}\right) = 4,09 \text{ mm}\right]$

Příklad 6.5

Klepsydra byly vodní hodiny užívané ve starověku v Egyptě, Číně, Indii, Řecku a Římě. Klepsydra byla nádoba s vodou s otvorem ve spodní části. Byla vyrobena tak, že pokles hladiny při vytékání vody z ní byl rovnoměrný.

a) navrhněte tvar klepsydry $[y = \alpha x^4]$

b) navrhněte poloměr klepsydry aby klepsydra fungovala 24 hodin (otvor ve dně má průměr 1 mm a hladina vody rovnoměrně klesá o 1 cm za hodinu) $[r = 0,442 \text{ m}]$

Příklad 6.6

O jaký úhel se odchýlí od vodorovné roviny hladina kapaliny v cisternovém voze, který brzdí se zpomalením 5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$? $\left[\alpha = \arctan \frac{a}{g} = 26,565^o = 26^o\,33'\,54,18''\right]$

Příklad 6.7

Jakou práci je třeba vykonat ke zdvižení vertikálně umístěné přehradní rovinné desky (hať) na úroveň vodní hladiny? Deska je z jedné své strany pod tlakem vody, druhou svou stranou je deska opřena o opory, spodní hranou stojí na dně. Hmotnost desky je m=250 kg, šířka desky b=3 m a hloubka vody h=1,5 m, koeficient tření desky o opory je $\mu = 0,3$. Pohyb desky probíhá ve směru kolmém k vodní hladině. Zahražený vodní prostor je velmi velký, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, hustota vody je $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ $\left[mgh + \mu\rho g b \frac{1}{6} h^3 = 8645\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 6.8

Voda je umístěna v nádrži tvaru kvádru s rozměry dna 5x6 m, výška hladiny je 2 m, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Za jakou dobu vyteče polovina vody malým otvorem na dně s průřezem S'=100 $\mathrm{cm^2}$? $\left[t = \frac{S}{S'}\sqrt{\frac{h_0}{g}}(\sqrt{2}-1) = 561\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 6.9

Koule plave ve vodě a je do ní ponořena polovinou svého objemu. Jakou práci je třeba vykonat na vytažení koule nad hladinu kapaliny ? Poloměr koule je R =1 m, hustota vody je $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. $\left[A = \frac{5}{12}\pi\rho g R^4 = 12841\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 6.10

Newtonovo vědro. Ve válcové nádobě poloměru $r = 10$ cm je umístěna kapalina. Nádoba koná kolem své geometrické osy 100 otáček za minutu, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete

a) tvar povrchu v nádobě $\left[y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2\right]$

b) o kolik se sníží hladina kapaliny uprostřed nádoby $\left[h = \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{g}r^2 = 0,0274\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 6.11

Jakou výslednou silou působí voda na čtvercovou stěnu akvária, je-li délka stěny $a = 1$ m. hustota vody je $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. $\left[F = \frac{1}{2}\rho g a^3 = 4905\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 6.12

Malý izraelský chlapec hodil do Mrtvého moře o hustotě $\rho_m = 1240\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ kouli z kůry korkového dubu o hustotě $\rho = 200\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a poloměru $R = 10$ cm. Vypočítejte, v jaké hloubce h pod hladinou se nachází nejnižší část plovoucí koule.

$\left[h^3 - 3Rh^2 + 4\frac{\rho}{\rho_m}R^3 = 0,\ h = 5,089\ \mathrm{cm}\right]$

Příklad 6.13

Injekční stříkačka o vnitřním průměru $d_s = 10$ mm je zakončena jehlou o vnitřním průměru $d_j = 1$ mm. Jakou silou musíme působit na píst stříkačky, abychom kapalinu hustoty $\rho = 1200$ kg.m^{-3} a objemu $\Delta V = 10$ ml vytlačili za čas $\Delta t = 1$ s? Kapalinu považujte za ideální. $\left[F = \frac{2\rho}{\pi}\left(\frac{d_s^4 - d_j^4}{d_s^2 d_j^4}\right)\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)^2 = 7,64 \text{ N}\right]$

Příklad 6.14

Do svislé stěny nádoby jsou vyvrtány dva malé otvory ve výškách $z_1 = 0,5$ m a $z_2 = 0,8$ m ode dna.

a) V jaké výšce H musí být hladina ideální kapaliny, aby tato z obou otvorů dostříkla do stejné vzdálenosti? $[H = z_1 + z_2 = 1,3 \text{ m}]$

b) Jaká je tato vzdálenost? $[x = 2\sqrt{z_1 z_2} = 1,26 \text{ m}]$

Kapitola 7

Teoretická mechanika

Příklad 7.1

Popište matematické kyvadlo délky l pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu.

$\left[\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\right]$

Příklad 7.2

Matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l je volně uchyceno ve vzdálenosti r od osy kotouče, který rotuje úhlovou rychlostí ω. Osy otáčení kotouče a kyvadla jsou rovnoběžné. Popište pohyb kyvadla pomocí Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

$\left[\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{r\omega^2}{l}\cos(\varphi - \omega t)\right]$

Příklad 7.3

Homogenní tenká tyč o hmotnosti m a délce l je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Popište pohyb tyče pomocí Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Jako zobecněnou souřadnici použijte úhel α. $\left[\ddot{\alpha} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\alpha = 0\right]$

Příklad 7.4

Nakloněná rovina s úhlem sklonu α se pohybuje podél vodorovné přímky rovnoměrně zrychleně tak, že pro polohu jejího nejvyššího bodu platí $x_n = at^2/2$.

a) Najděte Lagrangeovu rovnice druhého druhu pro částici o hmotnosti m, která může po nakloněné rovině volně bez tření klouzat. $[\ddot{s} = mg\sin\alpha - ma\cos\alpha]$

b) Pro jaký úhel α může setrvávat částice na nakloněné rovině v klidu? $[\tan\alpha = a]$

Příklad 7.5

Dvě malé kuličky o hmotnostech m a M jsou spojeny provázkem délky l, jehož hmotnost můžeme zanedbat, provlečeným otvorem ve stole. Kulička o hmotnosti m klouže bez tření po vodorovné, dokonale hladké desce stolu. Popište pohyb kuliček pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu.

$\left[\ddot{r} - \frac{m}{m+M}r\dot{\varphi}^2 + \frac{Mg}{m+M} = 0, \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0\right]$

Příklad 7.6

Korálek o hmotnosti m je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru R, po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí ω. Najděte Lagrangeovy rovnice druhého druhu popisující pohyb korálku. $\left[\ddot{\vartheta} + \sin\vartheta\left(\frac{g}{r} - \omega^2\cos\vartheta\right) = 0\right]$

Příklad 7.7

Na pružinu délky l_0 o tuhosti k zavěsíme závaží o hmotnosti m. Pružina může volně otáčet v jedné rovině a její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat. Najděte Lagrangeovy rovnice druhého druhu popisující pohyb tohoto závaží. $\left[\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{2\dot{l}\dot{\varphi}}{l}, \ddot{l} + \frac{k}{m}l = \frac{k}{m}l_0 + l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi\right]$

Příklad 7.8

Na pružinu délky l_0 o tuhosti k zavěsíme závaží o hmotnosti m. Pružina může volně otáčet v jedné rovině a její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat. Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice popisující pohyb tohoto závaží. $\left[\dot{l} = \frac{p_l}{m}, \dot{p}_l = \frac{p_\varphi^2}{ml^3} + mg\cos\varphi, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \dot{p}_\varphi = mgl\sin\varphi\right]$

Příklad 7.9

Homogenní tenká tyč o hmotnosti m a délce l je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Popište pohyb tyče pomocí Hamiltonových kanonických rovnic. Jako zobecněnou souřadnici použijte úhel α.
$\left[\dot{\alpha} = \frac{3p_\alpha^2}{ml^2}, \dot{p}_\alpha = -\frac{1}{2}mgl\cos\alpha\right]$

Příklad 7.10

Korálek o hmotnosti m je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru R, po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí ω. Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice popisující pohyb korálku. $\left[\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2}, \dot{p}_\vartheta = -mgr\sin\vartheta + mr^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right]$

Kapitola 8

Gravitační pole

Příklad 8.1

Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_I=421800 km s periodou T_I=1,769 dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou $a_M = 2,55 \cdot 10^{-3}$ AU s periodou T_M=27,322 dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země.

Astronomická jednotka 1 AU je rovna $149,598 \cdot 10^6$ km . $\left[\frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2\ a_I^3}{T_I^2\ a_M^3} = 322\right]$

Příklad 8.2

Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od r_{MP}=363300 km v perigeu do r_{MA}=405500 km v apogeu, perioda oběhu Měsíce kolem Země je T_M=27,322 dne. Umělá družice se pohybuje po eliptické dráze nad rovníkem tak, že v perigeu je ρ_{DP}=225 km nad povrchem Země a v apogeu je ρ_{DA}=710 km. Rovníkový poloměr Země je R_Z=6378 km. Určete periodu oběhu umělé družice T_D.

$$\left[T_M \sqrt{\left(\frac{\rho_{DA} + \rho_{DP} + 2R_Z}{r_{MA} + r_{MP}}\right)^3} = 0,0649 \text{ dne} = 1{,}56 \text{ h} = 1 \text{ h } 34 \text{ min}\right]$$

Příklad 8.3

Jupiterův měsíc Ganymed obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_G=1070000 km s periodou T_G=7,15 dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_M=384400 s periodou T_M=27,32 dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země. $\left[\frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2\ a_G^3}{T_G^2\ a_M^3} = 315\right]$

Příklad 8.4

V jaké vzdálenosti od středu Země r_1 je na spojnici Země-Měsíc velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m nulová? Vzdálenost Země-Měsíc je d, pro hmotnost Měsíce použijte $M_M = M_Z/81$.

$\left[r_1 = \frac{9}{10}d\right]$

Příklad 8.5

Popíšeme pohyb stacionární družice Země, hmotnost Země je rovna $M_z = 5,983 \cdot 10^{24}$ kg , střední poloměr Země je roven $R_z = 6,373 \cdot 10^6$ m , gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2} . vypočítejte

a) vzdálenost h stacionární družice od povrchu Země $\left[\sqrt[3]{\frac{\varkappa M_z T^2}{4\pi^2}} - R_z = 35889 \text{ km}\right]$

b) oběžnou rychlost v této družice $\left[\sqrt[6]{\frac{4\pi^2 \varkappa^2 M_z^2}{T^2}} = 3073 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

Příklad 8.6

Máme nekonečně dlouhou přímku o délkové hustotě μ Vypočítejte

a) intenzitu gravitačního pole v kolmé vzdálenosti $r > 0$ od přímky $\left[K = -\frac{2\varkappa\mu}{r}\right]$

b) potenciál gravitačního pole v kolmé vzdálenosti $r > 0$ od přímky $[\varphi = 2\varkappa\mu \ln r + C]$

Příklad 8.7

Máme homogenní tenkou kruhovou desku o poloměru a a hmotnosti M. Vypočítejte

a) potenciál gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose desky $\left[\varphi(x) = -\frac{2\kappa M}{R^2}\left(\sqrt{x^2+R^2} - |x|\right)\right]$

b) intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose desky $\left[K_x = \frac{2\kappa M}{R^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) - \operatorname{sign}(x)\right]$

Příklad 8.8

Najděte takovou vzdálenost h, aby ve výšce h nad povrchem Země a v hloubce h pod povrchem Země byla gravitační síla stejná. $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R_z\right]$

Příklad 8.9

Mějme hmotné těleso v podobě protáhlé homogenní tyče hmotnosti M a délky l ležící v ose x. Ve vzdálenosti x_0 od středu tyče leží na ose x částice hmotnosti m. Určete gravitační sílu, která na částici působí působící. $\left[F = -\frac{\varkappa m M}{x_0^2 - \frac{l^2}{4}}\right]$

Příklad 8.10

Určete gravitační zrychlení ve výšce $h = 20$ km nad zemským povrchem. gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2} , hmotnost Země je rovna $M_z = 5,983 \cdot 10^{24}$ kg , střední poloměr Země je roven $R_z = 6,373 \cdot 10^6$ m $\left[g = \frac{\varkappa M_z}{(R_z+h)^2} = 9,767 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\right]$

Kapitola 9

Elektřina a magnetismus

Příklad 9.1

Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě, který leží uprostřed mezi dvěma náboji Q_1=+50 nC a Q_2=+70 nC, které jsou od sebe vzdálené $r = 20$ cm. Náboje jsou v petroleji, permitivita petroleje je rovna $\varepsilon_p = 2\varepsilon_0$, permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} $\left[\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2 - Q_1}{r^2}\right) = 8,983 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}\right]$

Příklad 9.2

Tenká kruhová deska o poloměru R je elektricky nabita s konstantní plošnou hustotou náboje σ. Vypočítejte

a) potenciál elektrického pole v ose desky $\left[\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2 + R^2} - |x|\right)\right]$

b) intenzitu elektrického pole v ose desky $\left[\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\text{sign}(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right]$

c) intenzitu elektrického pole v ose desky pro $x \ll R$ $\left[\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\text{sign}(x)\right]$

Příklad 9.3

Dvě velmi malé kuličky, z nichž každá má hmotnost $m = 3 \cdot 10^{-6}$ kg, jsou ve vakuu zavěšeny na velmi tenkých vláknech dlouhých l=0,05 m a visících ze společného bodu. Oběma kuličkám byl udělen stejně velký záporný náboj. Kuličky se odpuzují tak, že vlákna na nichž visí, jsou odchýlena od svislého směru o úhel $\alpha = 30°$. Najděte velikost nábojů. Celá soustava je umístěna v gravitačním poli, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m $\cdot$ s^{-2} , permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} .

$\left[q = 4l \sin\alpha\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg \tan\alpha} = 2,17 \cdot 10^{-9} \text{ C}\right]$

Příklad 9.4

Vypočtěte kapacitu kondenzátoru, jehož elektrody jsou tvořeny soustřednými kulovými plochami o poloměrech $R_1 = 3$ cm a $R_2 = 4$ cm. Mezi elektrodami je vakuum, permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} . $\left[C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 1,335.10^{-11} \text{ F} = 13,35 \text{ pF}\right]$

Příklad 9.5

Vypočtěte kapacitu válcového kondenzátoru výšky h =20 cm s poloměry elektrod $R_1 = 3$ cm a $R_2 = 4$ cm. Mezi elektrodami je vakuum, permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}

$$\left[C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = 39 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 39 \text{ pF}\right]$$

Příklad 9.6

Máme deskový kondenzátor se čtvercovými elektrodami o ploše S=400 cm^2, vzdálenost elektrod d = 1 cm. Pomocí elektrické baterie nabijeme na rozdíl potenciálů U_0 = 10 V. Odpojíme baterii a mezi elektrody vložíme dielektrikum o relativní permitivitě ε_r=4, které má tloušťku 1 cm a má plochu jen 10×20 cm^2. učete

a) kapacitu kondenzátoru před vložením dielektrika $\left[C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 3,54.10^{-11}\ \mathrm{F} = 35,4\ \mathrm{pF}\right]$

b) kapacitu kondenzátoru po vložení dielektrika $\left[C_= C_0 \frac{1+\varepsilon_r}{2} = 8,85.10^{-11}\ \mathrm{F} = 88,5\ \mathrm{pF}\right]$

c) energii kondenzátoru před vložením dielektrika $\left[W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = 1,77.10^{-9}\ \mathrm{J}\right]$

d) energii kondenzátoru po vložení dielektrika $\left[W = \varepsilon_0 \frac{S}{d} U_0^2 \frac{1}{1+\varepsilon_r} = 7,08.10^{-10}\ \mathrm{J}\right]$

e) sílu, kterou se přitahují elektrody kondenzátoru po vložení dielektrika $\left[F = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{d^2(1+\varepsilon_r)} = 7,08.10^{-8}\ \mathrm{N}\right]$

f) práci na vytažení dielektrika z kondenzátoru $\left[A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{d}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_r} - \frac{1}{2}\right) = -1,062.10^{-9}\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 9.7

Deskový kondenzátor má elektrody plochy S, jejich vzájemná vzdálenost je d. Část plochy S_d mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem s relativní premitivitou ε_r. Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

$\left[C = \varepsilon_0 \frac{S - S_d}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S_d}{d}\right]$

Příklad 9.8

Vypočítejte kapacitu dvou rovnoběžných vodičů poloměru r a délky l, pro vzdálenost jejichž os platí $a \gg r$ a $l \gg a$. $\left[C = \frac{\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{a-R}{R}}\right]$

Příklad 9.9

Vypočtěte intenzitu elektrického pole ve vakuu kolem nekonečně dlouhé rovnoměrně nabité niti ve vzdálenosti a=5 cm od niti. Délková (lineární) hustota náboje τ =0,01 μC/m. K řešení využijte Gaussův zákon elektrostatiky. permitivita vakua je $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

$\left[E = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi a} = 3595,1\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}\right]$

Příklad 9.10

Odvoďte vztah pro intenzitu elektrického pole podél osy kruhu o poloměru R, nabitého rovnoměrně nábojem o plošné hustotě σ. $\left[E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \mathrm{R}^2}}\right)\right]$

Příklad 9.11

Vodivá koule o poloměru R je nabita nábojem Q. Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$. Vypočítejte

a) intenzitu elektrického pole E_1 uvnitř koule $[E_1 = 0]$

b) intenzitu elektrického pole E_2 vně koule $\left[E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right]$

c) potenciál elektrického pole φ_2 vně koule $\left[\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]$

d) potenciál elektrického pole φ_1 uvnitř koule $\left[\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right]$

Příklad 9.12

Vodní kapka vznikla spojením $N = 6$ stejných kapiček, z nichž každá měla (oproti nekonečnu) potenciál $\varphi_1 = 1$ kV. Jaký má potenciál φ_N (oproti nekonečnu) nově vzniklá kapka? $\left[\varphi_N = N^{\frac{2}{3}}\varphi_1\right]$

Příklad 9.13

Elektrické pole je vytvářeno bodovým nábojem $Q = 1\mu$C, který se nachází v počátku souřadné soustavy. Vypočítejte divergenci intenzity tohoto pole v bodě [1,1,1]. Uveďte kompletní postup výpočtu divergence. $\left[\text{div } \vec{E} = 0\right]$

Příklad 9.14

Elektrické pole je vytvářeno bodovým nábojem $Q = 1\mu C$, který se nachází v počátku souřadné soustavy. Vypočítejte rotaci intenzity tohoto pole v bodě [1,1,1]. Uveďte kompletní postup výpočtu rotace. $\left[\text{rot } \vec{E} = \vec{0}\right]$

Příklad 9.15

Magnetické pole je vytvářeno nekonečně dlouhým přímým vodičem protékaným proudem $I = 1A$. Vodič leží na ose z. Vypočítejte divergenci indukce magnetického pole v bodě [1,1,1]. Uveďte kompletní postup výpočtu divergence. $\left[\text{div } \vec{B} = 0\right]$

Příklad 9.16

Magnetické pole je vytvářeno nekonečně dlouhým přímým vodičem protékaným proudem $I = 1A$. Vodič leží na ose z. Vypočítejte rotaci indukce tohoto pole v bodě [1,1,1]. Uveďte kompletní postup výpočtu rotace. $\left[\text{rot } \vec{B} = \vec{0}\right]$

Příklad 9.17

Vypočítejte indukci magnetického pole buzeného dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe $a = 10$ cm, kterými teče proud $I = 2$ A stejným směrem, ve vzdálenosti $a_1 = 4$ cm od prvního na společné kolmé spojnici obou vodičů. Vodiče jsou umístěny ve vakuu, permeabilita vakua je rovna $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H $\cdot$ m^{-1} . $\left[B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a - a_1}\right) = 3,333 \cdot 10^{-6} \text{ T}\right]$

Příklad 9.18

Na obvodu kotouče s poloměrem $r = 10$ cm je rovnoměrně rozložen náboj $Q = 10^{-8}$ C. Kotouč se otáčí kolem osy procházející jeho středem frekvencí $f = 100$ Hz. Vypočtěte velikost intenzity magnetického pole H ve středu kotouče. $\left[H = \frac{fQ}{2r} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}\right]$

Příklad 9.19 Z bronzové desky o tloušťce h=1 mm s rezistivitou ϱ_R=0,17 $\mu\Omega\cdot$m vyřežeme rovinný prstenec ve tvaru mezikruží s vnitřním poloměrem r_1=10 cm a vnějším poloměrem r_2=50 cm.

Jaký bude odpor tohoto prstence když:

a) prstenec radiálně rozřízneme a přívody budou okraje řezu, $\left[R = \frac{2\pi\rho}{h}\frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = 663,7\cdot 10^{-6}\,\Omega\right]$

b) přívody proudu budou obě ohraničující kružnice. $\left[R = \frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{r_2}{r_1} = 43,55\cdot 10^{-6}\ \Omega\right]$

Příklad 9.20

Měděným válcovým vodičem o průměru d=3,2 mm prochází stálý elektrický proud I=5 A. Předpokládejte, že na vedení proudu se podílí jeden elektron z každého atomu mědi.
molární hmotnost mědi je $M_{Cu} = 63,5\ \mathrm{kg\cdot kmol^{-1}}$, hustota mědi je $\rho_{Cu} = 8890\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, Avogadrova konstanta je rovna $N_A = 6,023\cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol^{-1}}$, náboj elektronu je $e = -1,602\cdot 10^{-19}$ C

Určete

a) proudovou hustotu ve vodiči $\left[j = \frac{4I}{\pi d^2} = 6,2\cdot 10^5\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}\right]$

b) unášivou rychlost volných elektronů $\left[v = \frac{4IM_{Cu}}{\pi d^2 e N_A \rho_{Cu}} = 4,6.10^{-5}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\right]$

Příklad 9.21

Měděným drátem o poloměru R protéká konstantní proud I, jehož proudová hustota je v celém průřezu drátu konstantní. Určete:

a) hustotu energie magnetického pole uvnitř drátu ve vzdálenosti r od jeho osy $\left[w = \frac{1}{8}\frac{\mu I^2 r^2}{\pi^2 R^4}\right]$

b) celkovou energii magnetického pole uvnitř drátu délky a $\left[W_a = \frac{\mu I^2 r^2}{16\pi}\right]$

c) vlastní indukčnost drátu délky a, způsobenou magnetickým tokem uvnitř drátu $\left[L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu\, a}{8\pi}\right]$

Příklad 9.22

Vypočítejte magnetickou indukci nekonečně dlouhého přímého vodiče pomocí Biotova – Savartova zákona. $\left[\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a}\vec{k}\right]$

Příklad 9.23

Vypočítejte velikost magnetické indukce ve vzdálenosti r=10 cm od středu nekonečně dlouhého přímého vodiče poloměru R=5 mm, protékaného proudem $I = 1$ A. Vodič je umístěn ve vakuu, permeabilita vakua je rovna $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$ $\left[B = \mu_0\,\frac{I}{2\,\pi\, r} = 2\ \mu\mathrm{T}\right]$

Příklad 9.24

Určete vlastní indukčnost toroidální cívky, kterou protéká proud I. Počet závitů cívky je n.
$\left[L = \frac{\mu\, \mathrm{n}^2\, h}{2\,\pi}\, \ln\frac{r_2}{r_1}\right]$

Příklad 9.25

Obdélníkovou smyčkou o stranách b=10 cm, a=20 cm protéká proud I_1=10 A. V rovině smyčky ve vzdálenosti c=5 cm od delší strany je umístěn dlouhý přímý vodič protékaný proudem I_2=10 A. Stanovte velikost a směr výsledné síly působící na smyčku, umístěnou ve vakuu.
$\left[F = \frac{I_1 I_2 a \mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c+b}\right) = 1,06 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 9.26

Vodičem odporu R=5 Ω prošel elektrický náboj Q=40 C. Určete, jak velká práce tím byla vykonána, jestliže proud protékající vodičem klesal exponenciálně až na nulu tak, že každých τ=16 s se zmenšil na polovinu? $\left[\frac{RQ^2}{2\tau}\ln 2 = 173\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 9.27

Máte k dispozici zdroj elektromotorického napětí $U = 12$ V a drát z konstantanu o průměru $d = 0,5$ mm a rezistivitě $\rho = 5 \cdot 10^{-7}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. Jakou délku tohoto drátu potřebujete na zhotovení topné spirály o výkonu P = 10 W? $\left[l = \frac{\pi d^2}{4\rho}\frac{U^2}{P} = 1,67\ \mathrm{mm}\right]$

Příklad 9.28

Kabelem o délce $l = 100$ km protéká proud $I = 400$ A. Jakou hybnost mají elektrony v tomto kabelu? náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C , hmotnost elektronu je $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
$\left[p = \frac{l I m_e}{q_e} = 2,27 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}\ kg}\right]$

Příklad 9.29

Částice o hmotnosti m a náboji q se nachází ve zkříženém homogenním elektrickém a magnetickém poli, $\vec{B} = (0, 0, B_0), \vec{E} = (E_0, 0, 0)$. V čase $t = 0$ platí $\vec{v} = \vec{v}_0 = (0, 0, 0)$ a $\vec{r} = \vec{r}_0 = (0, 0, 0)$. Vypočítejte

a) časovou závislost rychlosti $\left[\vec{v} = \frac{E_0}{B_0}\left(\sin\frac{qB_0}{m}t, \cos\frac{qB_0}{m}t - 1, 0\right)\right]$

b) časovou závislost polohového vektoru $\left[\vec{r} = \frac{E_0 m}{qB_0^2}\left(1 - \cos\frac{qB_0}{m}t, \sin\frac{qB_0}{m}t - \frac{qB_0}{m}t, 0\right)\right]$

Příklad 9.30

Na vodorovných vodivých kolejnicích s roztečí h je v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí B kolmou na kolejnice, umístěn vodivý jezdec o hmotnosti m, který se po kolejnicích může volně bez tření pohybovat. Vypočítejte, jak se bude s časem měnit rychlost pohyblivé spojky, pokud v čase $t = 0$ ke kolejnicím připojíme zdroj napětí o velikosti U. Celkový elektrický odpor obvodu je R. Rychlost jezdce v čase $t = 0$ je nulová. $\left[v = \frac{U}{Bh}\left(1 - e^{-\frac{B^2h^2}{mR}t}\right)\right]$

Příklad 9.31

V homogenním magnetickém poli $\vec{B}$ kolmém k nákresně, se rychlostí $\vec{v}$ pohybuje po dvou rovnoběžných

vodivých kolejnicích vodič. Jaký proud protéká odporem R=10 Ω, je-li $v = 1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $l = 0{,}1$ m, $B = 0{,}1$ T? (Magnetické pole vytvořené proudem zanedbejte.) $\left[I = \frac{Blv}{R} = 10^{-3}\ \mathrm{A}\right]$

Příklad 9.32

Vodivá kruhová smyčka o poloměru $\frac{a}{2}$ a elektrickém odporu R je umístěna v homogenním časově proměnném magnetickém poli s indukcí $B = B_0 \cos \omega t$. Indukce je kolmá na plochu smyčky. Vypočítejte proud indukovaný ve smyčce. $\left[I = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4R} \sin \omega t\right]$

Kapitola 10

Harmonické kmity

Příklad 10.1

Doba kmitu harmonického pohybu je $T = 3,14$ s,v okamžiku $t = 0$ je výchylka $x_0 = 10$ cm a rychlost $v_0 = 0,4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete

a) amplitudu A $\left[A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = 0,22\ \mathrm{m}\right]$

b) fázovou konstantu φ_0 $\left[\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{\omega x_0}{v_0} = 0,46\ \mathrm{rad}\right]$

Příklad 10.2

Částice koná harmonický pohyb. Její maximální rychlost je $v_0 = 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a maximální zrychlení $a_0 = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete

a) úhlovou frekvenci ω $\left[\omega = \frac{a_0}{v_0} = 4\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}\right]$

b) periodu T $\left[T = \frac{2\pi v_0}{a_0} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s} = 1,57\ \mathrm{s}\right]$

c) frekvenci f $\left[f = \frac{a_0}{2\pi v_0} = \frac{2}{\pi}\ \mathrm{Hz} = 0,64\ \mathrm{Hz}\right]$

d) amplitudu x_0 $\left[x_0 = \frac{v_0^2}{a_0} = \frac{3}{2}\ \mathrm{m} = 1,5\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 10.3

Těleso visí na pružině a kmitá s periodou $T = 0{,}5$ s, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. O kolik se pružina zkrátí odstraněním tělesa? $\left[g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 6,2\ \mathrm{cm}\right]$

Příklad 10.4

Na pružnou spirálu zavěsíme na spodním konci závaží hmotnosti značně větší než je hmotnost spirály. Při tom se spirála protáhne o 4 cm. S jakou frekvencí bude soustava kmitat, udělíme-li jí ve svislém směru impuls ? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = 2,51\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 10.5

Pozorováním tlumeného harmonického kmitavého pohybu se zjistilo, že po dvou za sebou následujících výchylkách na stejnou stranu se amplituda kmitů zmenšila o 6/10 a že doba kmitu T= 0,5 s. Určete

a) součinitel tlumení δ $\left[\delta = -\frac{\ln\frac{4}{10}}{T} = 1,833\ \mathrm{s}^{-1}\right]$

b) logaritmický dekrement útlumu Λ. $[\Lambda = \delta T = 0,916]$

Příklad 10.6

Za jak dlouho se energie kmitavého pohybu ladičky s frekvencí $f = 435$ Hz zmenší $n = 10^6$ krát? Jaký je činitel jakosti ladičky? Logaritmický dekrement útlumu je roven $\Lambda = 8 \cdot 10^{-4}$. $\left[t = \frac{\ln n}{2\Lambda f} = 19,84\ \mathrm{s}\right]$ $\left[Q = \frac{\pi}{\Lambda} = 3927\right]$

Příklad 10.7

Jaká je frekvence netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti m =2 g, je-li amplituda $A = 10$ cm a celková energie hmotného bodu $W = 1$ J ? $\left[\frac{1}{\pi A}\sqrt{\frac{W}{2m}} = 50,35\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 10.8

Jaký je logaritmický dekrement útlumu Λ tlumeného harmonického oscilátoru, jestliže za čas t=10 s trvání pohybu hmotný bod ztratí 50 % své mechanické energie. Perioda tlumeného pohybu je T=2 s. $\left[\frac{\ln 2}{2t}T = 0,0693\right]$

Příklad 10.9

Pohybová rovnice vynuceně kmitajícího oscilátoru je $\ddot{x} + 4\sqrt{2}\dot{x} + 25x = \sin(3t)$. Určete frekvenci Ω_r při které dojde k rezonanci amplitudy. $\left[\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 3\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 10.10

Určete dobu kmitu T kapaliny, která je nalita do trubice tvaru U tak, že celková délka sloupce kapaliny je $l = 1$ m, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ $\left[T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = 1,42\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 10.11

Mobilní telefon spadne do kanálu, který ústí na druhé straně Země. Za jak dlouho se telefon vrátí? střední poloměr Země je roven $R_z = 6,373 \cdot 10^6$ m , hmotnost Země je rovna $M_z = 5,983 \cdot 10^{24}$ kg . Hustotu Země budeme pokládat za konstantní, gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

$\left[t = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\varkappa M_z}} = 5059\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}19\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 10.12

Dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružinou o tuhosti k. Vypočítejte periodu kmitů tohoto systému za předpokladu, že na něj nepůsobí vnější síly a že pohyb je jednorozměrný.

$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}\right]$$

Příklad 10.13

Kruhová deska koná ve svislém směru kmitavý harmonický pohyb s amplitudou $A = 0{,}75$ m, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jaká může být maximální frekvence kmitání desky, aby se předmět volně uložený na desku od ní neoddělil? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = 0,575\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 10.14

Vodorovná deska koná kmitavý pohyb v horizontálním směru s periodou $T = 5$ s. Závaží ležící na desce se začne smýkat v okamžiku, kdy amplituda kmitů dosáhne velikosti $A_0 = 0,5$ m. Jaký je koeficient smykového tření μ mezi závažím a deskou? $\left[\mu = \frac{4\pi^2 A_0}{T^2 g} = 0,080\right]$

Příklad 10.15

Nalezněte amplitudu A a fázi ψ výsledného harmonického pohybu $u = A\sin(\omega t + \psi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce se stejnou periodou, $u_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1), u_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ amplitudami $A_1 = 3$ cm, $A_2 = 5$ cm a fázemi $\varphi_1 = 0^o$, $\varphi_2 = 60^o$

$$\left[\sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + A_2^2\sin^2\varphi_2} = 7\ \mathrm{cm}\right]$$

$$\left[\arcsin\left(\frac{A_2\sin\varphi_2}{\sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + A_2^2\sin^2\varphi_2}}\right) = 38,2132^o = 38^o 12' 47'' \doteq 0,667\ \mathrm{rad}\right]$$

Příklad 10.16

Nalezněte amplitudu a fázi výsledného harmonického pohybu $u = A\cos(\omega t+\varphi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce $u_1 = A_1\cos(\omega\ t + \varphi_1), u_2 = A_2\cos(\omega\ t + \varphi_2)$ $A_1 = A_2 = 5$ cm, fáze $\varphi_1 = 30^o$, $\varphi_2 = 60^o$. $\left[A_1\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} = 9,66\ \mathrm{cm}\right]$

$$\left[\arccos\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}{\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1-\varphi_2)]}} = \arcsin\frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1-\varphi_2)]}} = 45^o = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad}\right]$$

Příklad 10.17

Nalezněte rovnici kmitu, který vznikl složením dvou navzájem kolmých harmonických kmitů $x = A_1\sin(\omega t + \varphi_0)$ a $y = A_2\sin(\omega t + \varphi_0)$, kde $A_1 = 10$ cm, $A_2 = 5$. Dráhu nakreslete. Uveďte název křivky. $\left[y = \frac{1}{2}x,\ \text{úsečka}\right]$

Příklad 10.18

Nalezněte rovnici kmitu, který vznikl složením dvou navzájem kolmých kmitů $x = \sin\omega t, y = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Uveďte název křivky a dráhu nakreslete. $\left[x^2 + \frac{y^2}{4^2} = 1,\ \text{elipsa}\right]$

Příklad 10.19

Hmotný bod se pohybuje v rovině xy po trajektorii zadané parametrickými rovnicemi $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$

a) Určete tvar trajektorie [elipsa]

b) Vypočítejte složky vektoru rychlosti $[\vec{v} = (-A\omega \sin \omega t, B\omega \cos \omega t)]$

c) Vypočítejte velikost vektoru rychlosti $\left[v = |\omega| \sqrt{(A \sin \omega t)^2 + (B \cos \omega t)^2}\right]$

d) Vypočítejte složky vektoru zrychlení $\left[\vec{a} = (-A\omega^2 \cos \omega t, B\omega^2 \sin \omega t)\right]$

e) Vypočítejte velikost vektoru zrychlení $\left[a = \omega^2 \sqrt{(A \cos^2 \omega t)^2 + (B \sin^2 \omega t)^2}\right]$

Příklad 10.20

Hmotný bod se pohybuje v rovině xy po trajektorii zadané parametrickými rovnicemi. Určete rovnice trajektorie $y = f(x)$ pro

a) $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 2\omega t$, $\left[y(x) = \frac{2B}{A^2} x^2 - B\right]$

b) $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 3\omega t$. $\left[y(x) = \frac{4B}{A^3} x^3 - \frac{3B}{A} x\right]$

Kapitola 11

Relativita

Příklad 11.1

Elektron byl urychlen v kondenzátoru, mezi jehož deskami je napětí $U = 10^6$ V. Určete jeho rychlost. klidová hmotnost elektronu je $m_{e0} = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg , náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} $\left[c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{e0}c^2}{eU + m_{e0}c^2}\right)^2} = 0,941\, c = 2,82 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

Příklad 11.2

Jaké napětí je třeba dle klasické fyziky na urychlení elektronu na rychlost světla? $\left[\frac{m_{e0}c^2}{2e} = 256 \text{ kV} \right]$

Jakou rychlost elektron urychlený tímto napětím skutečně získá? náboj elektronu je $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C , klidová hmotnost elektronu je $m_{e0} = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg , rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m$\cdot$s^{-1} $\left[c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{e0}c^2}{eU + m_{e0}c^2}\right)^2} = 0,745c = 2,24 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

Příklad 11.3

Při srážkách částic (primárního) kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony. Jsou to nestabilní částice se střední dobou života 0 $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s (v klidové soustavě mionu) a s hmotností $m = 207\ m_e$. Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blížící se rychlosti světla. Za střední dobu života τ_0 se mion rozpadá na elektron a dvě neutrina.

Mion vznikl ve výšce 15 km a má rychlost $v = 0,9998\ c$. Jakou dráhu urazí mion v klidové soustavě Země? rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} $\left[\frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 32995 \text{ m} \right]$

Příklad 11.4

Letící objekt vidíme zkrácený ve pohybu na polovinu. rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} Vypočítejte rychlost objektu $\left[v = \sqrt{\frac{3}{4}}\, c = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right]$

Příklad 11.5

Kosmonaut budoucnosti letí v raketě, která se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí 0,8 c. Zadané úkoly splnil za čas t_0=1 hodina palubního času. Jaký čas t trvalo splnění úkolu pro pozemskou obsluhu? Výslednou hodnotu vyjádřete v minutách. $\left[t = \frac{5}{3} t_0 = 100 \text{ min} \right]$

Příklad 11.6

Na jeden metr čtvereční zemského povrchu dopadá průměrný výkon I=1390 W (intenzita). Jakou hmotnost ztratí Slunce za jeden rok vlivem vyzářené energie? Vzdálenost Země od Slunce $R = 149,6 \cdot 10^6$ km, rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} . $\left[\frac{4\pi R^2 I t}{c^2} = 1,37 \cdot 10^{17} \text{ kg}\right]$

Příklad 11.7

K Zemi se blíží od Proximy Centauri raketa A rychlostí u_1 = 0,9 c, z opačného směru pak raketa B rychlostí u_2 = 0,8 c. Jakou rychlostí u se pohybují obě rakety vůči sobě? $\left[u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}} = 0,988\, c\right]$

Příklad 11.8

Řidič projel křižovatkou na červenou. Policistovi, který jej zastavil, tvrdí, že prostě jel trochu rychleji a červenou barvu semaforu tedy viděl jako zelenou. Jakou rychlostí by musel jet, aby červené světlo o vlnové délce λ_c = 700 nm viděl jako světlo zelené o vlnové délce λ_z = 550 nm? $\left[v = \frac{{\lambda_c}^2 - \lambda_z^2}{{\lambda_c}^2 + \lambda_z^2} \cdot c = 0,24c\right]$

Příklad 11.9

Vypočítejte, jakou dobu trvá průlet protonu kosmického záření naší Galaxií

a) vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Galaxií $\left[\Delta t_G = \frac{d}{c} = 100000 \text{ let}\right]$

b) vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem $\left[\Delta t_p = \frac{d}{c}\frac{E_0}{E} = 4,93 \text{ minuty}\right]$

Energie protonu je $E = 10^{10}$ GeV, klidová energie protonu je E_0 = 938 MeV, průměr Galaxie d = 100000 světelných let, rychlost světla ve vakuu je $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1} .

Příklad 11.10

Dvě částice o stejných klidových hmotnostech m_0 se pohybují po přímce proti sobě tak, že pro velikost rychlosti každé z nich platí $v = \frac{3c}{5}$. Jejich srážkou vznikne nová částice. Jaké je její klidová hmotnost M_0? $\left[M_0 = \frac{5}{2} m_0\right]$

celkem **191** příkladů