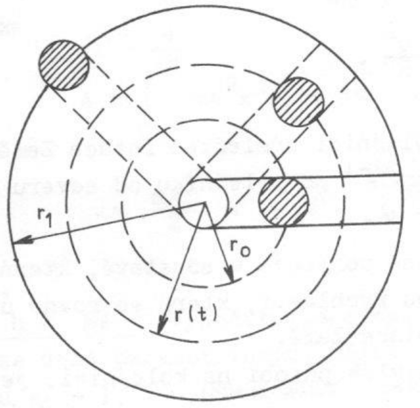


Určete: a) Závislost vzdálenosti r koule od středu kotouče na čase t,

b) závislost relativní rychlosti v' koule na vzdálenosti od středu kotouče,

c) velikost Coriolisovy síly působící na kouli na obvodě kotouče.

$$r(t) = r_o \cosh \omega t$$

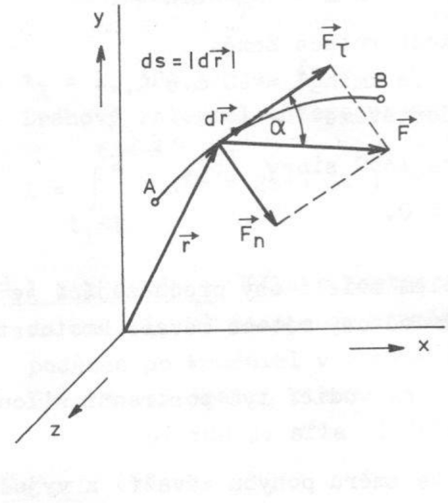
$$v'(r) = \omega\sqrt{r^2 - r_o^2}$$

$$F_c^*(r_1) = 2m\omega v' r_1 = = 2\, m\,\omega^2 \sqrt{r_1^2 - r_o^2} = 38{,}4\ [\mathrm{N}]$$

1.4. Práce a energie

<u>Práce síly</u> $\vec{F}$ po dráze mezi body A, B je dána

$$A = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B F\, ds \cos \varphi\,.$$



Jednotkou práce je joule: $[A] = J = N.m = kg.m^2.s^{-2}$.

Protože $F \cos \varphi = F_\tau$, je práce síly $\vec{F}$ rovna práci její tečné složky $\vec{F}_\tau$:

$$A = \int_A^B \vec{F}_\tau\, d\vec{r} = \int_A^B F_\tau\, ds\,.$$

Práce normálové složky $\vec{F}_n$ je rovna nule, jelikož vektory $\vec{F}_n$ a $d\vec{r}$ jsou vzájemně kolmé.

<u>Kinetická energie</u> je rovna práci, kterou vykoná setrvačná síla $\vec{F}_s = - m\,\vec{a}$ hmotného bodu m, přejde-li z pohybu o rychlosti v do klidu:

$$W_k = \int_v^0 \vec{F}_s\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv^2 \qquad [W_k] = J.$$

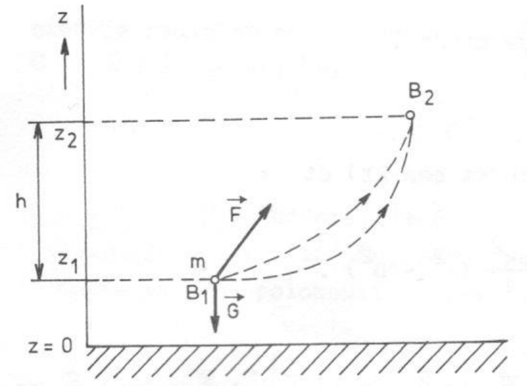
<u>Kinetická energie</u> je stejně veliká jako práce síly $\vec{F}$, která působí na hmotný bod, aby jej uvedla z klidu do pohybu o rychlosti v:

$$A = \int_0^v \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv^2\,.$$

Práce síly, která způsobí změnu rychlosti hmotného bodu z hodnoty v_1 na v_2 je rovna přírůstku kinetické energie:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W_{k2} - W_{k1}\,.$$

Je-li $v_2 > v_1 \Rightarrow A > 0$, tzn. že při zrychlování pohybu koná práci síla působící na hmotný bod a kinetická energie se zvyšuje. Je-li $v_2 < v_1 \Rightarrow A < 0$, tzn. že při zpožďování pohybu koná kladnou práci setrvačná síla hmotného bodu a kinetická energie se zmenšuje.



<u>Potenciální energie</u> (v bodě B_2) <u>v tíhovém poli</u> je rovna práci, kterou vykoná síla $\vec{F}$, přenese-li hmotný bod ze <u>vztažného bodu</u> B_1 do místa B_2. Výpočet této práce vede na vztah

$$A = W_p = - \int_{B_1}^{B_2} \vec{G}\, d\vec{r} = mgh, \qquad [W_p] = J$$

Tato práce a tedy potenciální energie nezávisí na dráze, po které se hmotný bod z B_1 do B_2 pohybuje, závisí pouze na rozdílu výšek konečného a výchozího místa. Práce je kladná, je-li výška konečného bodu větší než výchozího bodu.

Tato práce je stejná, bude-li hmotný bod přenášen z kteréhokoli místa roviny z_1 do kteréhokoli místa roviny z_2.

Je také zřejmé, že

$$A = W_p = \int_{B_2}^{B_1} \vec{G}\, d\vec{r} ,$$

což je práce, kterou vykoná tíhová síla, přenese-li hmotný bod z B_2 zpět do vztažného místa B_1.

Síly, jejichž práce nezávisí na dráze, se nazývají <u>síly konzervativní</u>. Je zřejmé, že práce těchto sil po uzavřené dráze je nulová.

<u>Zákon zachování mechanické energie:</u> součet kinetické a potenciální energie se při pohybu v homogenním tíhovém poli nemění

$$W_k + W_p = \text{konst},$$

nebo lze také říci, že součet změn kinetické a potenciální energie je nulový

$$\Delta W_k + \Delta W_p = 0.$$

<u>Výkon</u> (okamžitý) je definován

$$P = \frac{dA}{dt}, \qquad [P] = W = J.s^{-1} = kg.m^2.s^{-3}.$$

Střední hodnota výkonu je $\quad \bar{P} = \frac{A}{t}$,

kde A je práce vykonaná za čas t.

Práci v době t_1, t_2, je-li znám časový průběh výkonu, vypočteme

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt .$$

Výkon lze také vyjádřit $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\, d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$.

<u>Ú l o h a 63 :</u> Hmotný bod m se pohybuje po eliptické dráze, jejíž parametrické rovnice jsou $x(t) = a \cos kt$, $y(t) = b \sin kt$. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla způsobující tento pohyb, za dobu mezi okamžiky $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{4k}$.

<u>Řešení:</u> Práce síly $\vec{F}(F_x, F_y)$ je dána integrálem

$$A = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int (F_x\, dx + F_y\, dy) .$$

Složky vektoru síly jsou podle 2. pohybového zákona dány:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = - mak^2 \cos kt , \qquad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = - mbk^2 \sin kt .$$

Složky vektoru elementární dráhy $d\vec{r}$ (dx, dy) můžeme vyjádřit:

$$dx = \frac{dx}{dt}\, dt = - ak \sin kt\, dt ,$$

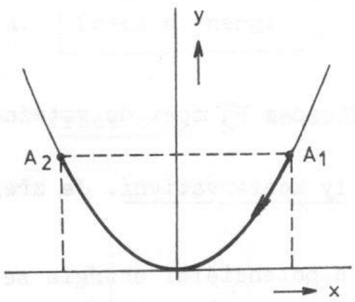
$$dy = \frac{dy}{dt}\,dt = bk \cos kt \, dt \, .$$

Potom

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4k}} (ma^2k^3 \sin kt \cos kt - mb^2k^3 \sin kt \cos kt)\, dt =$$

$$= \frac{mk^3}{2}(a^2 - b^2)\int_0^{\frac{\pi}{4k}} \sin 2kt \, dt = \frac{mk^2}{4}(a^2 - b^2)\, .$$

Ú l o h a 64 : Vypočítejte práci proměnné síly $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\,\vec{i} + (y^2 - 2xy)\,\vec{j}$ po dráze dané parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$ (parabola) z bodu $A_1(1, 1)$ do bodu $A_2(-1, 1)$. (Síla je zadána v newtonech).



Řešení:

$$A = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\, dx + F_y\, dy)\, ,$$

kde $d\vec{r} = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy = \vec{i}\, dt + \vec{j}\, 2t\, dt$. Tedy

$$A = \int_{A_1}^{A_2} (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy \, .$$

$t = \frac{y}{x}$, pak parametr t pro bod A_1 má hodnotu $t_1 = 1$, pro A_2 je $t_2 = -1$.

Dráhový integrál můžeme vyjádřit pomocí parametru t :

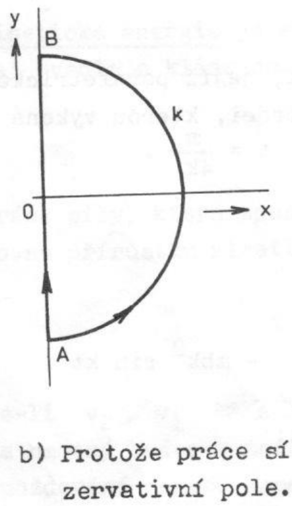
$$A = \int_{t_1=1}^{t_2=-1} (t^2 - 2t^3)\, dt + (t^4 - 2t^3)2t\, dt = \int_1^{-1} (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4)\, dt = \frac{14}{15}\ \mathrm{J}.$$

Ú l o h a 65 : Těleso hmotnosti $m = 1$ kg je přemísťováno z bodu $A(0, -1, 0)$ do bodu $B(0, 1, 0)$ působením proměnné síly $\vec{F} = 2y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + 3y\,\vec{k}$, jednou podél osy y, podruhé po kružnici v rovině XY se středem v počátku. (Síla je zadána v newtonech).

Určete: a) práci, kterou síla $\vec{F}$ v každém z případů vykoná,

b) zda je síla $\vec{F}$ konzervativní.

Řešení:



a) Práce síly $\vec{F}$ podél osy y je:

$$A = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B F_y\, dy = 0\, ,$$

neboť složka síly F_y podél této dráhy je trvale nulová.

Práce síly $\vec{F}$ podél kružnice k je:

$$A = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B F_x\, dx + \int_A^B F_y\, dy = \int_0^0 F_x\, dx + \int_{-1}^1 F_y\, dy = \int_{-1}^1 F_y\, dy.$$

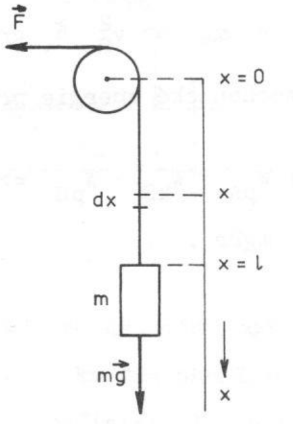
$$\text{Tedy} \quad A = \int_{-1}^1 F_y\, dy = \int_{-1}^1 x^2\, dy = \int_{-1}^1 (1 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}\ \mathrm{J}\, .$$

b) Protože práce síly $\vec{F}$ z A do B je závislá na dráze, nevytváří zadaná síla konzervativní pole.

Ú l o h a 66 : Jaká práce se vykoná při zvedání břemene hmotnosti m lanem délky ℓ, vedeným přes nehmotnou kladku,

a) zanedbáme-li hmotnost lana,

b) je-li hmotnost 1 m lana m_o ?



Řešení:

a) $A = F.\ell = mg\ell$,

b) hmotnost délkového elementu dx lana je $m_o\,dx$, jeho tíha je $m_o g\,dx$;

práce ke zvednutí tohoto elementu je

$$dA' = m_o g\,x\,dx\ ;$$

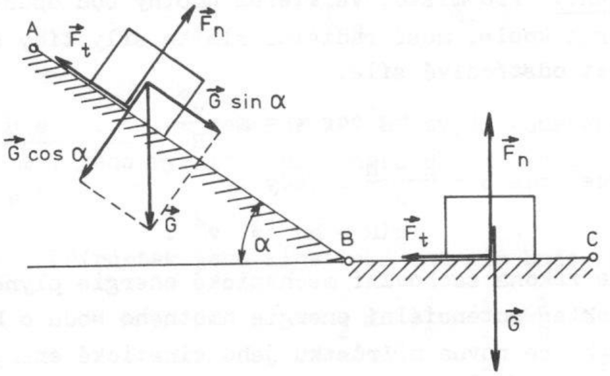
celková práce pro zvednutí celé délky lana je

$$A' = \int_0^\ell dA' = \int_0^\ell m_o g x\,dx = \frac{1}{2} m_o g \ell^2 .$$

Výsledná práce je

$$A + A' = mg\ell + \frac{1}{2} m_o g \ell^2 = g\ell(m + \frac{1}{2} m_o \ell)\ .$$

Ú l o h a 67 : Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze $\overline{AB}$ a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze $\overline{BC}$, na které se zastaví. Určete koeficient tření, je-li dáno: úhel α, dráhy $\overline{AB} = s_1$, $\overline{BC} = s_2$.



Řešení: Práce síly tření na dráze $\overline{BC}$ je rovna kinetické energii v bodě B :

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = F_t s_2\ ,$$

tedy

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = \mu\, mgs_2 . \qquad (a)$$

Pohybová rovnice pohybu rovnoměrně zrychleného po dráze $\overline{AB}$ je

$$G \sin\alpha - F_t = ma\ ,$$

tedy

$$mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = ma\ .$$

Zrychlení pohybu je

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\ .$$

Pro rychlost pohybu v bodě B platí

$$v_B^2 = 2as_1 = 2s_1 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\ .$$

Dosazením do vztahu (a) dostáváme:

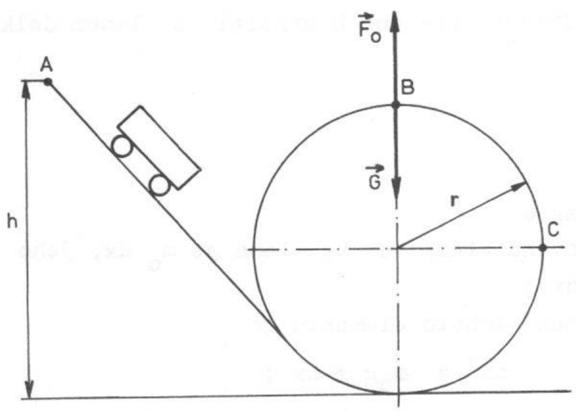
$$s_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \mu s_2\ .$$

Odtud

$$\mu = \frac{s_1 \sin\alpha}{s_2 + s_1 \cos\alpha}\ .$$

Ú l o h a 68 : Dráha kolejnic leží ve vertikální rovině a má tvar, jak je vyznačen na obrázku. Z bodu A dráhy, jehož výška nad vodorovnou rovinou je h , vyjíždí bez počáteční rychlosti vozík.

Určete výšku h, aby vozík opsal celou kruhovou dráhu. Tření je zanedbatelné.



Řešení: V bodě B působí na vozík síly: tíha $G = mg$ a odstředivá síla $F_o = \frac{mv_B^2}{r}$. Aby se v bodě B vozík nezvrátil, musí být

$$F_o \geqq G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{r} \geqq mg \Rightarrow v_B^2 \geqq gr .$$

Zákon zachování mechanické energie pro body A a B :

$$W_A = W_B \Rightarrow W_{kA} + W_{pA} = W_{kB} + W_{pB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} mv_B^2 + mg2r .$$

Rychlost v bodě B je potom

$$v_B = \sqrt{2g(h - 2r)} .$$

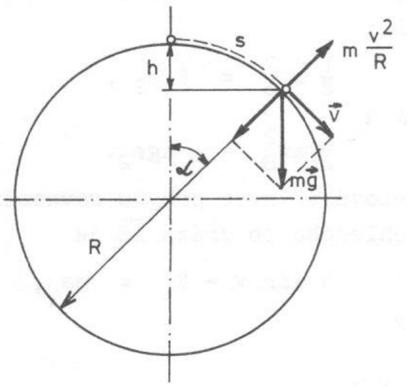
Z podmínky pro rychlost v bodě B dostáváme: $h \geqq \frac{5}{2} r$.

Ú l o h a 69 : Z vrcholu dokonale hladké koule poloměru $R = 1{,}5$ m se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod.

Určete: a) vertikální polohu místa, ve kterém opustí povrch koule,

b) jakou dráhu do tohoto okamžiku urazil,

c) velikost rychlosti, se kterou opustí povrch koule.



Řešení: Pro místo, ve kterém hmotný bod opustí povrch koule, musí radiální složka síly tíhy se rovnat odstředivé síle:

$$mg \cos\alpha = m \frac{v^2}{R} ,$$

kde $\cos\alpha = \frac{R - h}{R}$. Tedy

$$g(R - h) = v^2 .$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že pokles potenciální energie hmotného bodu o hodnotu mgh se rovná přírůstku jeho kinetické energie:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh .$$

Potom

$$g(R - h) = 2gh \Rightarrow h = \frac{R}{3} = 0{,}5 \text{ m.}$$

$$v = \sqrt{2gh} = 3{,}13 \text{ m.s}^{-1},$$

$$s = R\alpha = R \arccos \frac{2}{3} = 1{,}2 \text{ m.}$$

Ú l o h a 70 : Matematické kyvadlo hmotnosti m je vychýleno z vertikálního směru o úhel φ_o a v čase $t = 0$ uvolněno; hmotnost závěsu je zanedbána, jeho délka je L .

Určete: a) závislost rychlosti kyvadla na jeho poloze,

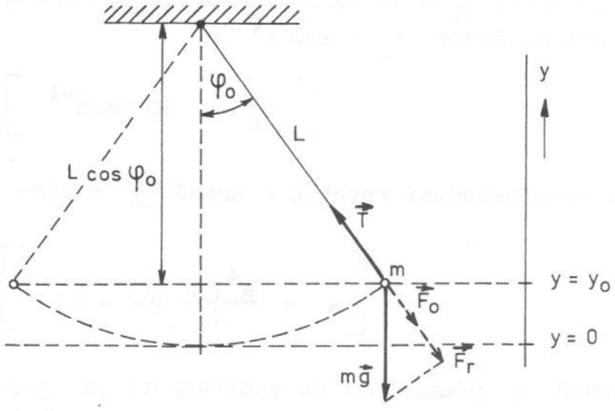
b) jeho rychlost v nejnižším bodě dráhy,

c) síla, kterou je napínán závěs.

Řešení:

a) Zákon zachování mechanické energie:

$$W(t) = W_k(t) + W_p(t) = \frac{1}{2} mv^2 + mgy = \text{konst.}$$



Pro $t = 0$:

$y(0) = y_o = L - L\cos\varphi_o =$

$= L(1 - \cos\varphi_o)$

$v(0) = 0$

$W(0) = mgy_o = mgL(1 - \cos\varphi_o)$.

Pro $t \neq 0$:

$W(t) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \overset{!}{=} mgy_o$;

odkud

$v = \sqrt{2g(y_o - y)} =$

$= \sqrt{2gL(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}$.

b) Pro nejnižší bod je $\varphi = 0$ a tedy $v = \sqrt{2gL(1 - \cos\varphi_o)}$.

c) V každém okamžiku působí na hmotný bod m tři síly:

radiální složka tíhy $F_r = mg\cos\varphi$, odstředivá síla $F_o = m\frac{v^2}{L}$ a reakce závěsu T :

$$T = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\varphi = m\left(\frac{v^2}{L} + g\cos\varphi\right) = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_o) .$$

Maximální silou je závěs napínán v okamžiku, kdy $\varphi = 0$:

$$T_{max} = mg(3 - 2\cos\varphi_o) .$$

Ú l o h a 71 : Na jaké dráze s zvýší konstantní síla F , působící na hmotný bod m , jeho rychlost na n-násobek rychlosti v_o , kterou měl na začátku dráhy s ?

Řešení: Přírůstek jeho kinetické energie bude roven práci síly po dráze s :

$$F\,s = \frac{1}{2}mn^2v_o^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_o^2(n^2 - 1) ;$$

$$s = \frac{mv_o^2(n^2 - 1)}{2F} .$$

Ú l o h a 72 : Určete rychlost v tělesa ve výšce h nad zemským povrchem při volném pádu, jestliže ve výšce $h_o > h$ byla jeho rychlost v_o (odpor prostředí se neuvažuje).

Řešení: Zákon zachování mechanické energie:

$$mgh_o + \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 ,$$

odtud

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2g(h_o - h)} .$$

Ú l o h a 73 : Vůz hmotnosti 1500 kg se pohybuje rychlostí $v_o = 5{,}5\ m.s^{-1}$. Vypočítejte sílu, která na dráze $s = 75$ m zvýší jeho rychlost na hodnotu $v = 8{,}57\ m.s^{-1}$.

[$F = 432$ N]

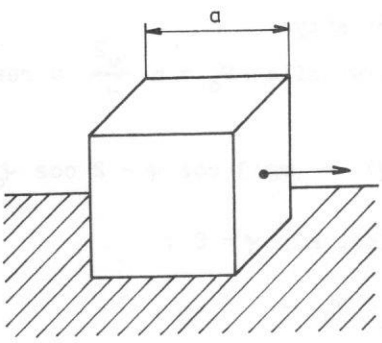
Úloha 74 : Zastaví-li vlak jedoucí rychlostí $v_1 = 60\ km.h^{-1}$ na dráze $s_1 = 400\ m$, z jaké rychlosti v_2 je možno jej zabrzdit na dráze $s_2 = 100\ m$?

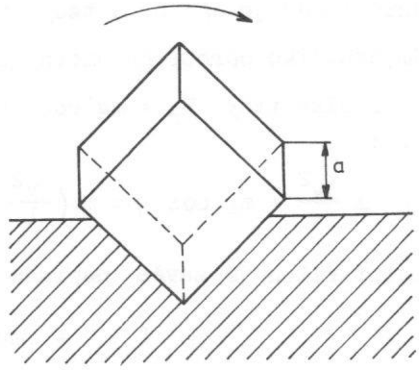
$$\left[\ v_2 = 30\ km.h^{-1}\ \right]$$

Úloha 75 : Vypočtěte práci potřebnou na překlopení krychle o hraně $\underline{a}$ a měrné hmotnosti ϱ.

$$\left[\ A = \frac{a^4 \varrho g}{2} (\sqrt{2} - 1)\ \right]$$

Úloha 76 : Těleso tvaru krychle o hraně a přemístíme do vzdálenosti d jednou tak, že ji táhneme po zemi, podruhé překlápěním přes hranu. Při jakém koeficientu tření je práce pro oba způsoby přemístění stejná?





$$\left[\ \mu = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) \doteq 0{,}207\ \right]$$

Úloha 77 : Těleso hmotnosti $m = 1\ kg$, vržené svisle vzhůru, má ve výšce 10 m kinetickou energii 50 J. Určete rychlost, se kterou dopadne na zem.

$$\left[\ v = 17{,}2\ m.s^{-1}\ \right]$$

Úloha 78 : Jaký je průměrný výkon jeřábu, který zvedá břemeno $m = 10^4\ kg$ do výšky $h = 6\ m$ za dobu 2 minut?

$$\left[\ \overline{P} = 4{,}9\ kW\ \right]$$

Úloha 79 : Vlak hmotnosti $10^6\ kg$ se rozjíždí z klidu a za 60 s dosáhne rychlosti $50\ km.h^{-1}$. Jakou práci musí vykonat stroj a jaký je jeho průměrný výkon?

$$\left[\ \begin{array}{l} A = 96.10^6\ J \\ \overline{P} = 1600\ kW \end{array}\ \right]$$

Úloha 80 : Výtah s nákladem má hmotnost $m = 1200\ kg$. Prvních 20 m své dráhy urazí za 4 s. Jaká práce byla za tuto dobu vykonána a jaký je průměrný výkon motoru pohánějící výtah?

$$\left[\ \begin{array}{l} A = 235{,}4\ kJ \\ \overline{P} = 58{,}85\ kW \end{array}\ \right]$$