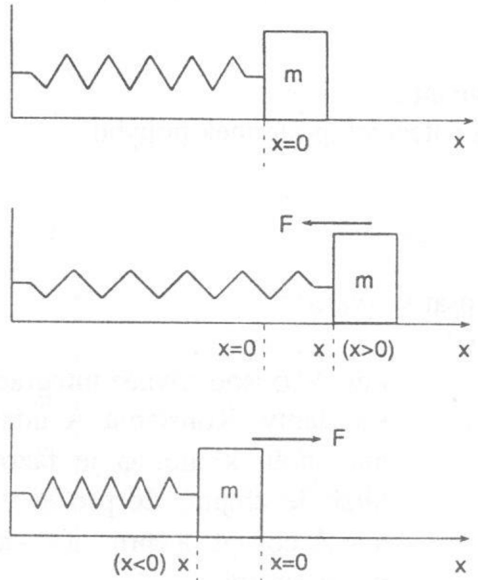
1. KMITY

1.1 Harmonický oscilátor

Na obrázku je znázorněn nejjednodušší model harmonického oscilátoru. Objekt hmotnosti m, upoutaný na konci pružiny (její hmotnost se neuvažuje), koná kmitavý pohyb na vodorovné, dokonale hladké rovině ve směru osy x. Každá taková pružina má svoji vlastní délku, při které na objekt nepůsobí žádná síla - říkáme, že objekt se nachází v **rovnovážné poloze**. Jestliže se objekt začne ze své rovnovážné polohy pohybovat vlevo (pružina se zkracuje) nebo vpravo (pružina se prodlužuje), začne pružina působit na objekt silou, která se snaží vrátit tento zpět do rovnovážné polohy. Tato síla se nazývá **pružná síla**. Její velikost je přímo úměrná výchylce x z rovnovážné polohy:



$$F = -k\,x\,.$$

Tento vztah platí za předpokladu, že pružina se zkracuje nebo prodlužuje v mezích platnosti Hookova zákona. Záporné znaménko ukazuje, že pružná síla působí vždy opačným směrem než je směr výchylky. Konstanta úměrnosti k se nazývá **tuhost**. Její rozměr je N/m a udává sílu potřebnou k výchylce o jednotku délky. Maximální výchylka se nazývá **amplituda**. **Perioda T** udává čas jednoho kmitu. **Frekvence** pak udává počet kmitů za 1 sekundu. Její jednotka se nazývá **hertz** (Hz). Je zřejmé, že

$$f = \frac{1}{T} \quad a \quad T = \frac{1}{f}\,.$$

Úloha 1-1. Vertikálně upevněná pružina se prodlouží o 0,150 m, zavěsíme-li na ni těleso hmotnosti 0,300 kg. Potom těleso vychýlíme o 0,100 m a uvolníme.
Určete: a) konstantu k
b) amplitudu kmitů

Řešení : a) ze vztahu pro pružnou sílu je

$$k = \frac{F}{x}$$

kde F = m g , x = 0,150 m .

Tedy
$$k = \frac{F}{x} = 19{,}6 \text{ N/m}\,.$$

b) Počáteční rychlost je nulová, proto amplituda kmitů je 0,100 m .

1.2 Netlumené kmity

Síla, která vyvolává netlumené kmity je pružná síla. Z druhého Newtonova zákona pak dostáváme **pohybovou rovnici** netlumených kmitů (pro kmity ve směru osy x)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0,$$

kde m je hmotnost kmitajícího objektu.
Obecné řešení této diferenciální rovnice má tvar

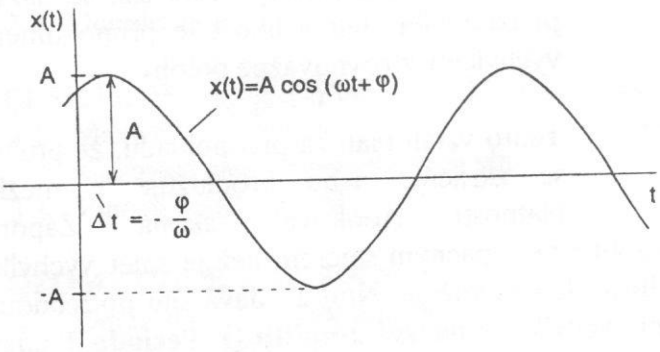
$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

kde a, b jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek pohybu.
Konstanta ω udává úhlovou frekvenci kmitů

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Pro řešení praktických úloh je výhodné toto řešení psát ve tvaru

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),$$



kde A, φ jsou rovněž integrační konstanty. Konstanta A udává amplitudu kmitů, φ je fázový úhel. Je zřejmé, že pro $\varphi = 0$ $x = A \cos \omega t$ a pro $\varphi = -\pi/2$ $x = A \sin \omega t$.
Jelikož funkce cos má periodu 2π, bude se pohyb po určité době opakovat. Tato doba udává **periodu T** kmitů.
Proto ze vztahu $\omega T = 2\pi$ dostáváme

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,$$

kde f je frekvence kmitů.
Průběh výchylky netlumených kmitů pak může být také popsán vztahy

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$$

nebo

$$x = A\cos(2\pi f t + \varphi),$$

kde

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

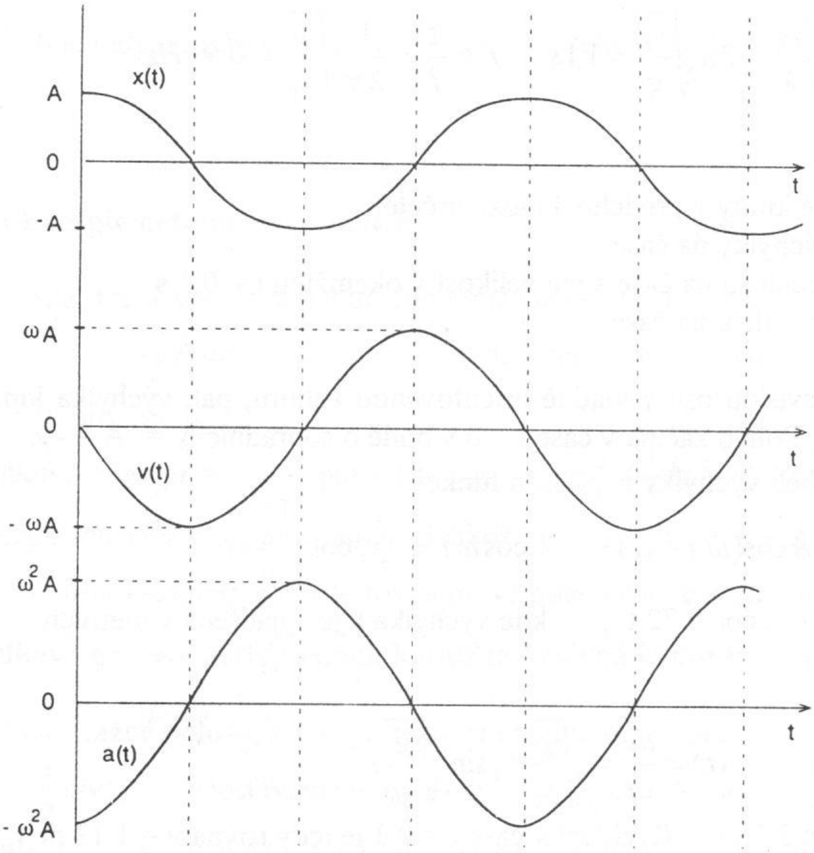
Je vidět, že **perioda a frekvence netlumených kmitů nezávisí na amplitudě**.

Rychlost a zrychlení netlumených kmitů dostaneme derivováním funkce výchylky x(t):

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Průběhy výchylky, rychlosti a zrychlení (pro $\varphi = 0$) jsou vyneseny na obrázku.



Rychlost dosahuje maxima

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

v okamžiku, kdy pohyb prochází rovnovážnou polohou x = 0 a je nulová v okamžiku, kdy výchylka dosáhne svého maxima $x = \pm A$.

Zrychlení dosahuje maxima

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A,$$

v okamžiku maximální výchylky $x = \pm A$, a je nulové v okamžiku, kdy pohyb prochází rovnovážnou polohou x=0.

Úloha 1-2. Těleso hmotnosti 0,6 kg zavěšené na vertikálně upevněné pružině ji prodlouží o $y_0 = 0.3m$. Vychýlíme-li poté těleso o $y_1 = 0.2m$ a volně vypustíme, začne konat netlumené kmity (když zanedbáme všechny odpory, hmotnost pružiny je rovněž zanedbána).

Určete: a) konstantu k

b) úhlovou frekvenci kmitů

c) maximální rychlost

d) maximální zrychlení

e) periodu a frekvenci kmitů

Řešení : a) $k = \frac{F}{y} = \frac{mg}{y_0} = 19.6\, N/m$

$$b)\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}} = 5.72\, s^{-1}$$

$$c)\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}} = 5.72\, s^{-1}$$

$$d)a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A = \frac{g}{y_0} y_1 = 6.53\, m/s^2$$

$$e)T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}} = 1.1 s, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_0}} = 0.91 Hz$$

Úloha 1-3. Pro netlumené kmity v předchozí úloze určete:

a) závislost výchylky na čase

b) závislost rychlosti na čase a její velikost v okamžiku t = 0,3 s.

c) závislost zrychlení na čase

Řešení : a) Zavedeme-li svislou osu y kladně orientovanou vzhůru, pak výchylka kmitů bude popsána funkcí y(t), Pohyb začíná v čase t = 0 v bodě o souřadnici y = -A = $-y_1$ a tedy φ = π . Potom průběh výchylky je popsán funkcí

$$y(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi) = -A\, \cos\omega\, t = -y_1 \cos\sqrt{\frac{g}{y_0}}\, t\,.$$

Číselně : y(t) = - 0.2 cos 5.72 t , kde výchylka y je vyjádřena v metrech a úhel 5,72 t v radiánech.

b) Závislost rychlosti je $v(t) = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g}{y_0}}\, y_1 \sin\sqrt{\frac{g}{y_0}}\, t\,.$

Číselně : v(t) = 1.14 sin 5.72 t . Rychlost v čase t = 0,3 je tedy rovna v = 1.13 m/s.

c) Závislost zrychlení je $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{y_0}\, y_1 \cos\sqrt{\frac{g}{y_0}}\, t\,.$

Číselně : a(t) = 6.53 cos 5.7 t .

Úloha 1-4. a) Těleso začíná konat netlumený kmitavý pohyb v maximální výchylce x = A, když je volně vypuštěno (v = 0 pro t = 0).

b) Ve druhém případě je pro t = 0 x = 0 a je mu udělena počáteční rychlost v = v_0 .

Pro oba případy určete konstanty obecného řešení pro výchylku

x = a cos ωt + b sin ωt .

Řešení : a) z počátečních podmínek x = A , v = 0 pro t = 0 máme

x(0) = A = a cos 0 + b sin 0 , odtud **a = A** ,

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t ,$$ pak v(0) = bω a tedy **b = 0**.

Pohyb je tedy popsán funkcí : x = A cos ωt

b) z počátečních podmínek x = 0 , $v = v_0$ pro t = 0 dostáváme rovnosti

$$x = a\cos 0 + b\sin 0 = 0$$

$$v = -a\omega \sin 0 + b\omega \cos 0 = v_0 .$$

Z první rovnosti máme a = 0 , z druhé $b = \frac{v_0}{\omega}$.

Pohyb je tedy popsán funkcí $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Jeho amplituda je $\frac{v_0}{\omega}$.

1.3 Energie netlumených kmitů

Síla, která vyvolává netlumené kmity se rovná F = - k x . Pak **potenciální energie** je $U = -\int F\,dx = \frac{1}{2}kx^2$, kde integrační konstanta je nula, když volíme U = 0 pro x = 0 .

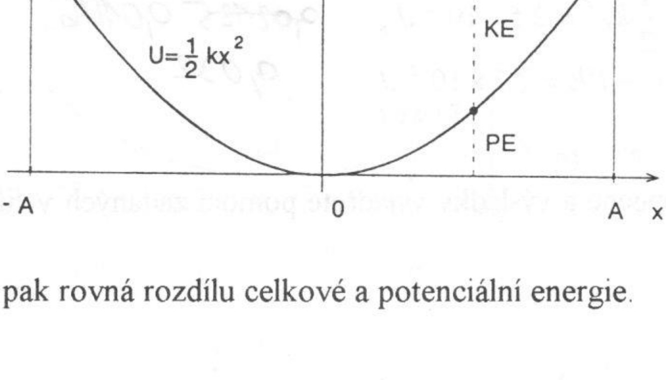
Celková energie kmitů je pak dána $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Pokud neuvažujeme tření, tato energie musí být stále konstantní. Jelikož pro souřadnice x = A , x = -A rychlost v = 0 , celková energie je zde rovna právě potenciální energii, tedy $E = \frac{1}{2}kA^2$.

Celková energie netlumených kmitů je úměrná kvadrátu amplitudy.

V rovnovážné poloze, x = 0, je celková energie rovna právě kinetické energii $E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$. Dostáváme tedy vztah : $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$.

Odtud lze získat užitečný výraz pro závislost rychlosti na výchylce :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} .$$



Jelikož

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} , \quad v = v_{\max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} .$$

Opět je vidět, že rychlost je maximální pro x = 0 a nulová pro $x = \pm A$.

Na obrázku je vynesen průběh potenciální energie v závislosti na výchylce. Kinetická energie se pak rovná rozdílu celkové a potenciální energie.

Úloha 1-5. Vertikálně orientovaná pružina se protáhne o $y_0 = 0{,}15$ m, zavěsíme-li na ni objekt hmotnosti m =0,13 k. Poté objekt vychýlíme o $y_1 = 0{,}1$ m a uvolníme (hmotnost pružiny se neuvažuje). Za předpokladu zanedbání všech odporů, objekt začne konat netlumený kmitavý pohyb.

Určete : a) energii pohybu

b) závislost kinetické a potenciální energie na čase

c) rychlost při výchylce y = 0.05 m z rovnovážné polohy

d) kinetickou a potenciální energii v polovině amplitudy

<u>Řešení</u> : a) $k = \dfrac{F}{y_0} = \dfrac{mg}{y_0} = 19.6\ N/m$. 8,5

Počáteční rychlost je nulová, tedy amplituda kmitů bude $A = y_1 = 0{,}1$ m. Potom energie kmitů bude

$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \cancel{9.8\times10^{-2}}\ J$. 0,0425 J

b) Je třeba znát závislost výchylky a rychlosti kmitů na čase. Zvolíme-li vertikální osu kladně orientovanou vzhůru, pak pro t = 0 je $y = -A = -y_1$ a proto fázový úhel $\varphi = \pi$.

Potom $y = -A\cos\omega t$, kde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 8.08\ s^{-1}$.

Číselně : $y = -0.1\cos 8.08\,t$, kde t je v sekundách a y v metrech.

Závislost rychlosti na čase je $v = \dfrac{dy}{dt} = 0.808\sin 8.08t$.

Pak závislost kinetické a potenciální energie na čase je

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = 9.8\times10^{-2}\sin^2 8.08\,t$$

$$PE = \frac{1}{2}ky^2 = 9.8\times10^{-2}\cos^2 8.08\,t\,.$$

c) potřebujeme znát v_{max} : $v_{max} = \omega A = 0.808\ m/s$, pak rychlost pro výchylku y = 0,05 m z rovnovážné polohy je

$$v = v_{max}\sqrt{1-\frac{y^2}{A^2}} = 0.7\ m/s\,.$$

d) pro y = A/2 = 0,05 m , potenciální a kinetická energie mají velikost

$$PE = \frac{1}{2}ky^2 = 2.5\times10^{-2}\ J\,,$$ ~~0,0425~~ 0,0106

$$KE = E - PE = 7.3\times10^{-2}\ J\,.$$ 0,032

Úloha 1-6. Řešte předchozí úlohu obecně a výsledky vyjádřete pomocí zadaných veličin m, y_0, y_1 .

Řešení: a) $k = \frac{F}{y_0} = \frac{mg}{y_0}$, $A = y_1$, $\varphi = \pi$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$,

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{y_0}y_1^2$$

b) $y = -y_1 \cos\omega t = -y_1 \cos\sqrt{\frac{g}{y_0}}\,t$

$$v = -y_1\sqrt{\frac{g}{y_0}}\sin\sqrt{\frac{g}{y_0}}\,t$$

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{y_0}y_1^2\left(\sin\sqrt{\frac{g}{y_0}}\,t\right)^2$$

$$PE = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{y_0}y_1^2\left(\cos\sqrt{\frac{g}{y_0}}\,t\right)^2$$

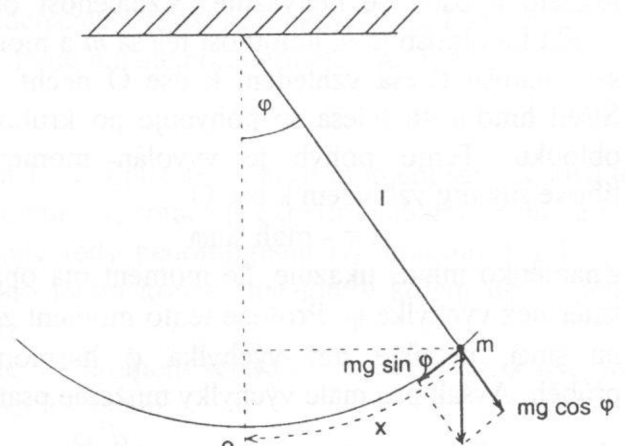
c) $v(y) = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - y^2\right)} = \sqrt{\frac{g}{y_0}\left(y_1^2 - y^2\right)}$

d) pro y = $y_1/2$

$$PE = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{8}\frac{mg}{y_0}y_1^2$$

$$KE = E - PE = \frac{3}{8}\frac{mg}{y_0}y_1^2$$

Úloha 1-7. Diskutujte síly působící na matematické kyvadlo a odpovězte následující otázky:
a) Je síla způsobující jeho pohyb úměrná jeho výchylce?
b) Je pohyb matematického kyvadla pohybem harmonickým?
c) Určete přibližný výraz pro jeho periodu.



Řešení: Idealisovaný hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu se nazývá matematické kyvadlo. Vychýlením ze své rovnovážné (svislé) polohy začne po uvolnění v důsledku tíhové síly konat kmitavý pohyb ve svislé rovině. Na obrázku, kyvadlo hmotnosti *m* zavěšené na závěsu délky *l* svírá úhel φ s vertikálním směrem. Síly, působící na kyvadlo jsou tíhová síla mg a síla vyvolaná napětím v závěsu. Tíhovou sílu lze rozložit na normálovou složku mg cosφ a tečnou složku mg sinφ. Normálová složka udržuje pohyb kyvadla po kruhovém oblouku a dává vznik normálovému zrychlení. Tečná složka má vždy opačný směr než je směr úhlové výchylky φ a snaží se vrátit kyvadlo zpět do jeho rovnovážné polohy. Tato síla tedy vyvolává pohyb kyvadla. Z obrázku lze odvodit, že síla je dána vztahem

$$F = -\,mg\sin\varphi\,.$$

Je zřejmé, že tato síla není úměrná výchylce φ (závisí na sinφ). Proto výsledný pohyb kyvadla nemůže mít harmonický průběh (výchylku nelze vyjádřit pomocí funkce cos nebo sin). Avšak pro malé úhly počáteční výchylky φ lze funkci sinφ aproximovat úhlem φ v radiánech. Potom malým úhlům výchylky bude odpovídat malý oblouk kruhové dráhy, který lze aproximovat délkou $x = l\varphi$.
Můžeme tedy shrnout: pro malé úhlové výchylky φ můžeme položit $\sin\varphi \cong \varphi$, a pak

$$F = -mg\varphi = -\frac{mg}{l}x\,.$$

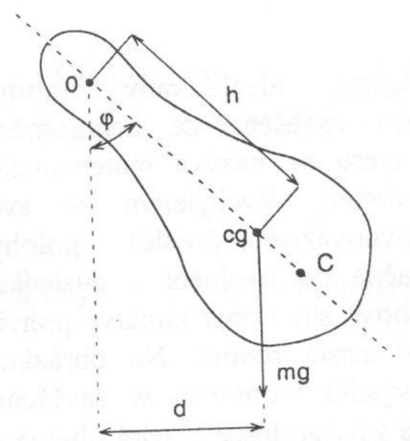
Tato síla má již stejné vlastnosti jako známá pružná síla F = -kx. Porovnáním dostáváme konstantu k matematického kyvadla $k = \dfrac{mg}{l}$ a tedy jeho periodu při malých amplitudách lze vyjádřit přibližným vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Je vidět, že tato **perioda nezávisí na hmotnosti** zavěšeného hmotného bodu.

Úloha 1-8. Odvoďte vztah pro periodu fyzikálního kyvadla při malých úhlových výchylkách.

Řešení : Fyzikálním kyvadlem nazýváme jakékoli tuhé těleso, které kývá ve vertikální rovině kolem osy kolmé na tuto rovinu a procházející tímto tělesem. Na obrázku je nakresleno těleso nepravidelného tvaru upevněné na ose O kolmé na rovinu nákresny a vychýlené o úhel φ ze své rovnovážné polohy. Tření mezi tělesem a osou se neuvažuje. Vzdálenost osy a středu hmotnosti je h, hmotnost tělesa m a moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose O nechť je I. Střed hmotnosti tělesa se pohybuje po kruhovém oblouku. Tento pohyb je vyvolán momentem tíhové síly mg vzhledem k ose O



$$\tau = -\,mgh\sin\varphi.$$

Znaménko minus ukazuje, že moment má opačný směr než výchylka φ. Protože tento moment závisí na sinφ, nemůže mít výchylka φ harmonický průběh. Avšak pro malé výchylky můžeme psát $\tau = -\,mgh\varphi$. Rotační pohyb tělesa kolem osy O je popsán rovnicí $\tau = I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, a tedy pohybová rovnice fyzikálního kyvadla za předpokladu malých úhlových výchylek má tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\varphi = 0 .$$

Dostáváme tedy výsledek, že při malých úhlových výchylkách fyzikální kyvadlo koná netlumený kmitavý pohyb, jehož úhlová frekvence je

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

a perioda pohybu je dána vztahem

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} .$$

Tohoto vztahu lze využít k určení tíhového zrychlení g.

Úloha 1-9. Matematické kyvadlo lze považovat za zvláštní případ kyvadla fyzikálního. Ukažte, že jeho periodu lze získat ze vztahu pro periodu fyzikálního kyvadla, diskutovaného v předcházející úloze.

Řešení : Položíme-li $I = ml^2$, h = l ve vztahu pro periodu fyzikálního kyvadla (m, l - hmotnost a délka matematického kyvadla), potom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Úloha 1-10. Určete délku matematického kyvadla, které má stejnou periodu jako dané fyzikální kyvadlo.

Řešení : Z rovnosti $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ dostáváme, že $l = \frac{I}{h}$.

Bod C ve vzdálenosti l od O na spojnici bodu O a středu hmotnosti (viz. obr. v předcházející úloze) se nazývá střed kmitů. Zavěsíme-li fyzikální kyvadlo do tohoto bodu, bude mít stejnou periodu, kterou má, je-li zavěšeno v bodě O.

Úloha 1-11. Způsob jak určit moment setrvačnosti tělesa nepravidelného tvaru vzhledem ke zvolené ose rotace je experimentální měření periody jeho kmitů kolem této osy.
Uvažujte tedy nehomogenní tyč hmotnosti 1 kg, jejíž střed hmotnosti leží 42 cm od jednoho jejího konce. Její kmity kolem osy procházející tímto koncem mají kmitočet 2,5 Hz.
Určete její moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem hmotnosti kolmo na rovinu kmitání.

Řešení : Ze vztahu pro periodu fyzikálního kyvadla dostáváme

$$I = \frac{T^2 mgh}{4\pi^2} .$$

Číselně pro T = 1/f = 0.4 s , h = 0.42 m , m = 1 kg dostáváme $I = 0.27\, kg\, m^2$.
Hledaný moment setrvačnosti se určí pomocí Steinerovy věty:

$$I' = I - mh^2 = 0.09\, kg\, m^2 .$$

Úloha 1-12. Homogenní tyč délky 1 m a hmotnosti m = 160 kg je zavěšena ve svém jednom konci.
Určete: a) její periodu při malém vychýlení z rovnovážné polohy
b) délku matematického kyvadla, které má stejnou periodu.

Řešení : a) Moment tyče vzhledem k ose procházející jejím koncem a kolmé na rovinu kmitů je dán vztahem (viz. Fyzika I - semináře) $I = \frac{1}{3} ml^2$. Protože střed hmotnosti leží v polovině její délky, položíme h = l/2 a její perioda pak bude mít velikost

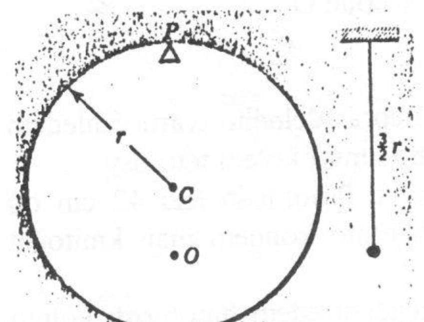
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1.64\, s .$$

b) Délka L matematického kyvadla, které bude mít stejnou periodu se určí z rovnosti

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} .$$

Tedy $L = \frac{I}{mh}$, což vede k výsledku $L = \frac{\frac{1}{3} ml^2}{m\frac{l}{2}} = \frac{2}{3} l = 0.67\, m .$

Úloha 1-13. Kruhový disk je zavěšen tak, že může konat kmitavý pohyb kolem bodu P (viz. obr.).



Určete: a) Jeho periodu při malých výchylkách a délku ekvivalentního matematického kyvadla.
b) Kde leží střed kmitů?
c) Jaká bude jeho perioda, bude-li zavěšeno uprostřed vzdálenosti mezi jeho obvodem a středem kmitů?

Řešení: a) Moment setrvačnosti disku vzhledem k ose procházející jeho středem kolmo na rovinu kmitů je $\frac{1}{2} mr^2$, kde r je poloměr disku a m jeho hmotnost (viz. Fyzika I - semináře). Potom moment vzhledem k rovnoběžné ose a procházející bodem P na obvodu je

$$I = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2 .$$

Hledaná perioda je pak dána (h = r):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}} .$$

Všimněte si, že perioda nezávisí na hmotnosti disku.
Matematické kyvadlo, která má stejnou periodu, bude mít délku, která se určí z rovnosti:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} ,$$

$$tedy \quad l = \frac{I}{mh} = \frac{\frac{3}{2}mr^2}{mr} = \frac{3}{2}r ,$$

nebo-li 3/4 průměru disku.

b) Střed kmitů tedy leží v bodě O, jehož poloha je $\frac{3}{2}r$ níže pod bodem P.

c) Bude-li disk zavěšen v bodě O, jeho moment setrvačnosti je $I = \frac{3}{4}mr^2$.
V tomto případě perioda kmitů se rovná (h = r/2)

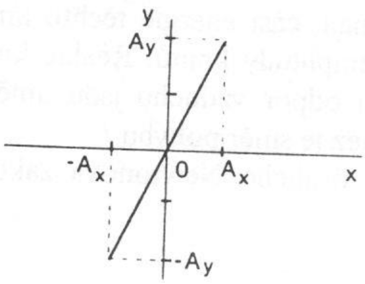
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}mr^2}{mg\frac{r}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}} ,$$

která je shodná s periodou T, což je ve shodě s vlastností středu kmitů.

Úloha 1-14. Vyšetřete skládání dvou netlumených vzájemně kolmých kmitů stejného kmitočtu, a) stejné fáze a různých amplitud
b) stejných amplitud a fázovým rozdílem π/2
c) různých amplitud a fázovým rozdílem π/2

Řešení: a) Položíme osy x,y do směrů kmitů. Pohyb v ose x je pak popsán funkcí

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi) ,$$



pohyb v ose y

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A_y}{A_x} x ,$$

což je rovnice přímky se směrnicí (A_y / A_x).
Výsledný pohyb se pak koná po přímce v rovině x,y obou kmitů. Kmity mají nulový fázový rozdíl, dosahují proto jak svého maxima tak i svého minima vždy ve stejný okamžik.

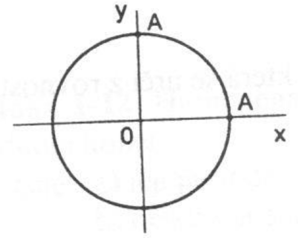
Na obr. je zvolena směrnice $A_y / A_x = 2$.

b) Kmity jsou popsány funkcemi

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

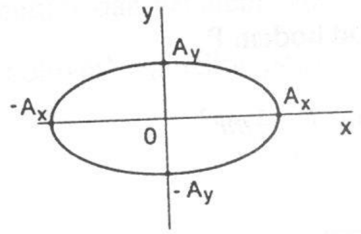
$$y = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t + \varphi) .$$

Potom $$x^2+y^2=A^2\cos^2(\omega t+\varphi)+A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=A^2,$$



což je rovnice kružnice v rovině x,y poloměru A. Výsledný pohyb je pohyb po kružnici poloměru A v rovině x,y obou kmitů.

c) Kmity jsou popsány funkcemi



$$x=A_x\cos(\omega t+\varphi)$$

$$y=A_y\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=A_y\sin(\omega t+\varphi)$$

proto $$\frac{x}{A_x}=\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{y}{A_y}=\sin(\omega t+\varphi)$$

což vede k rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=1,$$

jejíž hlavní osa je $2A_x$ a vedlejší osa je $2A_y$.
Výsledným pohybem je pohyb po elipse v rovině x,y obou kmitů.

1.4 Tlumené kmity

V důsledku odporu prostředí, v němž se kmity konají, část energie těchto kmitů přechází v energii tepelnou a výsledkem je zmenšování amplitudy kmitů. Reálné kmity jsou vždy tlumené kmity. Ve většině případů síly tření i odpor vzduchu jsou úměrné rychlosti pohybu a samozřejmě působí opačným směrem než je směr pohybu.

Pohybovou rovnici tlumených kmitů dostaneme z druhého Newtonova zákona, když za sílu F dosadíme součet síly pružné a síly tlumení:

$$F=-kx-Bv.$$

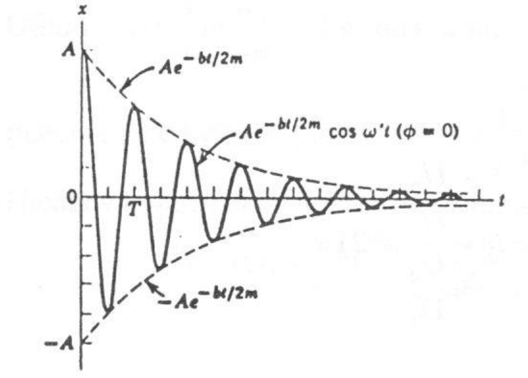
Tedy $$-kx-Bv=ma.$$

Potom můžeme psát $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{B}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0.$$

Položíme-li v této rovnici $\frac{B}{m}=2\delta$ a $\frac{k}{m}=\omega^2$, **rovnice tlumených kmitů** má tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0,$$

kde ω udává již známou úhlovou frekvenci netlumených kmitů a konstanta δ je **konstanta tlumení** $\left([\delta]=s^{-1}\right)$.



Pokud tření a odpory nejsou příliš velké a pokud δ<ω , řešení této rovnice má tvar

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega' t + \varphi),$$

kde

$$\omega' = 2\pi f' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}.$$

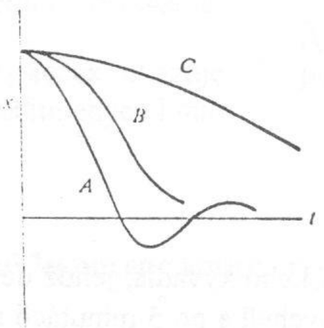
Perioda T_1 tlumených kmitů je $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega'} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$.

Na obrázku je vynesen průběh výchylky tlumených kmitů, když δ<ω . Amplituda klesá exponenciálně k nule pro $t \to \infty$. Úhlová frekvence ω' je menší než ω netlumených kmitů, perioda T_1 je delší než perioda netlumených kmitů. Pro δ = 0 toto řešení pochopitelně přechází v řešení pro netlumené kmity. Konstanta tlumení δ charakterizuje rychlost, se kterou amplituda kmitů klesá k nule. Čas $t_1 = 1/\delta$ je doba, za kterou amplituda klesne z počáteční velikosti A na hodnotu A/e. Proto, čím větší je δ, tím rychleji kmity ustanou.
Poměr dvou sousedních amplitud na téže straně od rovnovážné polohy je

$$\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t-T_1)}} = \frac{1}{e^{-\delta T_1}} = e^{\delta T_1} = b.$$

Konstanta **b** se nazývá **útlum**. Přirozený logaritmus útlumu je **logaritmický dekrement útlumu** Λ :

$$\Lambda = \ln b = \delta T_1.$$



S rostoucím třením se zvyšuje hodnota konstanty tlumení δ . Bude-li δ>ω, potom úhlová frekvence ω' je komplexní a nevzniknou žádné reálné kmity. Objekt se vrací po určité době zpět do své rovnovážné polohy (křivka C) - systém je přetlumený. Pro δ=ω (křivka B) opět nedochází ke kmitům a rovnovážné polohy je dosaženo v mnohem kratším čase. Říkáme, že systém koná kriticky tlumený pohyb. Křivka A representuje případ δ<ω .

Úloha 1-15. Počáteční výchylka kmitů je $U_0 = 3\,cm$. V čase t_1 = 10 s má amplituda velikost $U_1 = 1\,cm$. Určete čas t_2, pro který má velikost $U_2 = 0.3\,cm$.

<u>Řešení</u> : Pro čas t_1 platí : $U_1 = U_0 e^{-\delta t_1}$.

Odtud $\delta = \frac{1}{t_1} \ln \frac{U_0}{U_1}$.

Pro čas t_2 platí : $U_2 = U_0 \, e^{-\delta t_2}$.

Tedy $$t_2 = \frac{1}{\delta} \ln \frac{U_0}{U_2} = t_1 \frac{\ln \frac{U_0}{U_2}}{\ln \frac{U_0}{U_1}} = 21 \, s .$$

Úloha 1-16. Určete čas, za který energie tlumených kmitů s frekvencí $f_1 = 600$ Hz klesne 10^6 krát, je-li $\Lambda = 0{,}0008$.

Řešení : V čase t_1 je amplituda $A_1 \approx e^{-\delta t_1}$ a energie $E_1 \approx A_1^2$. V čase $t_2 = t_1 + t_x$ bude amplituda $A_2 \approx e^{-\delta t_2}$ a energie $E_2 \approx A_2^2$.

Víme, že $$\frac{E_1}{E_2} = n \quad (kde \; n = 10^6) \; .$$

Tedy $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = n \; .$$

Přitom $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\delta t_1}}{e^{-\delta (t_1 + t_x)}} = e^{\delta t_x} \; .$$

Proto $$e^{\delta t_x} = \sqrt{n}$$

a čas t_x je $$t_x = \frac{\ln \sqrt{n}}{\delta} \; .$$

Neznámá konstanta tlumení δ je dána jako $\delta = \frac{\Lambda}{T_1} = \Lambda \, f_1$.

Potom hledaný čas bude $$t_x = \frac{\ln \sqrt{n}}{\Lambda \, f_1} = 14.4 \, s .$$

Úloha 1-17. Určete logaritmický dekrement útlumu matematického kyvadla, jehož délka $L = 0.8$ m, jestliže při počáteční výchylce $\alpha_0 = 5^0$ bude jeho výchylka po 5 minutách mít velikost $\alpha = 0.5^0$.

Řešení : Logaritmický dekrement je definován $\Lambda = \delta \; T_1$, kde δ je konstanta tlumení, T_1 perioda tlumených kmitů.

Časová závislost amplitudy kmitů je $\alpha(t) = \alpha_0 \, e^{-\delta t}$, kde α_0 je počáteční výchylka.

Odtud $\delta = \frac{1}{t}\ln\frac{\alpha_0}{\alpha}$. Perioda kmitů se pak rovná $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$. Pro matematické kyvadlo platí T = $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, pak jeho úhlová frekvence je $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Hledaný logaritmický dekrement útlumu daného matematického kyvadla je

$$\Lambda = \delta T_1 = \frac{1}{t}\ln\frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{1}{t}\ln\frac{\alpha_0}{\alpha}\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{1}{t}\ln\frac{\alpha_0}{\alpha}\right)^2}} = 1.78 .$$

Úloha 1-18. Amplituda tlumených kmitů se zmenší třikrát za dobu jedné jejich periody T_1. Určete poměr period T_1/T, když T je perioda netlumených kmitů.

<u>Řešení</u> : ω_1, T_1 nechť jsou úhlová frekvence a perioda tlumených kmitů. ω, T úhlová frekvence a perioda netlumených kmitů.

Víme, že $\omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2$ (1) , kde δ je konstanta tlumení.

Pro poměr po sobě následujících amplitud platí $\frac{A_1}{A_2} = e^{\delta T_1}$.

Tedy $\delta = \frac{\ln\frac{A_1}{A_2}}{T_1}$. Potom rovnost (1) můžeme vyjádřit jako

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{(\ln 3)^2}{T_1^2} .$$

Odtud dostáváme $\frac{T_1}{T} = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln 3}{2\pi}\right)^2} = 1.015$.

Výsledek ukazuje, že perioda tlumených kmitů bude o 1.5 % delší než perioda netlumených kmitů.

1.5 Vynucené kmity, rezonance

Koná-li se kmitavý pohyb v odporujícím prostředí, zmenší se při každém cyklu energie o množství, jehož je třeba k překonání odporů. Kmity za nějaký čas vymizí. Chceme-li je udržet, je třeba z vnějšího zdroje doplňovat energii. To lze provést prací vnější síly. Nemůže to však být konstantní síla, neboť práce takové síly během jednoho cyklu je rovna nule. Konstantní síla způsobí pouze posunutí rovnovážné polohy o F/k, kde k je tuhost soustavy. Celková práce bude však od nuly různá, mění-li vnější síla svůj smysl vždy tak, aby působila ve smyslu pohybu. Protože kmitavý pohyb je periodický, musí mít také vnější působící síla periodický průběh.

Nejjednodušší periodicky proměnná síla má sinusový průběh

$$F_{ext} = F_0 \sin \Omega t ,$$

kde F_0 je její amplituda a Ω její úhlová frekvence.
Kmity, které mají svůj původ v působení vnější časově proměnné síly se nazývají **vynucené kmity**. Síla, která tyto kmity způsobuje, se nazývá **síla budicí**.

Výsledná síla působící vynucené kmity je součtem síly pružné, odporu prostředí a síly budicí. Podle druhého Newtonova zákona proto platí

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B\frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t$$

a po úpravě dostáváme pohybovou rovnici vynucených kmitů

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin \Omega t$$

kde $\delta = \dfrac{B}{2m}$ je konstanta tlumení, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ je vlastní úhlová frekvence volných kmitů.

Exaktní řešení této diferenciální rovnice vede k závěru, že výsledný pohyb se skládá z tlumeného pohybu, který by se konal, kdyby budicí síla nepůsobila, a z netlumených kmitů stálé amplitudy a stálého fázového rozdílu. Tlumené kmity po určité době vymizí a zbývají jen netlumené kmity, jejich frekvence je rovna frekvenci budicí síly. Tyto kmity jsou právě **vynucené kmity**, které jsou popsány rovnicí

$$x = A_0 \sin(\Omega t + \phi).$$

Tento partikulární integrál musí vyhovovat úplné diferenciální rovnici. Zpětným dosazením tohoto integrálu do diferenciální rovnice lze určit amplitudu vynucených kmitů $\mathbf{A_0}$:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \qquad (1)$$

Z rozboru tohoto vztahu plyne:

1. Amplituda vynucených kmitů je úměrná amplitudě budicí síly a nepřímo úměrná hmotnosti soustavy.
2. Amplituda vynucených kmitů je tím větší, čím menší je rozdíl mezi frekvencí budicí síly a vlastní frekvencí systému a čím menší je konstanta tlumení.
3. Amplituda vynucených kmitů je maximální při takové úhlové frekvenci budicí síly, pro kterou má jmenovatel v (1) nejmenší hodnotu. Řešení této úlohy vede k výrazu

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}. \qquad (2)$$

Při této úhlové frekvenci budicí síly dosahuje amplituda vynucených kmitů maximální hodnoty. Tato úhlová frekvence je tím menší než vlastní frekvence ω, čím větší je konstanta tlumení δ. Dosadíme-li tuto úhlovou frekvenci do výrazu (1) pro amplitudu vynucených kmitů, maximální hodnota amplitudy vynucených kmitů je dána výrazem

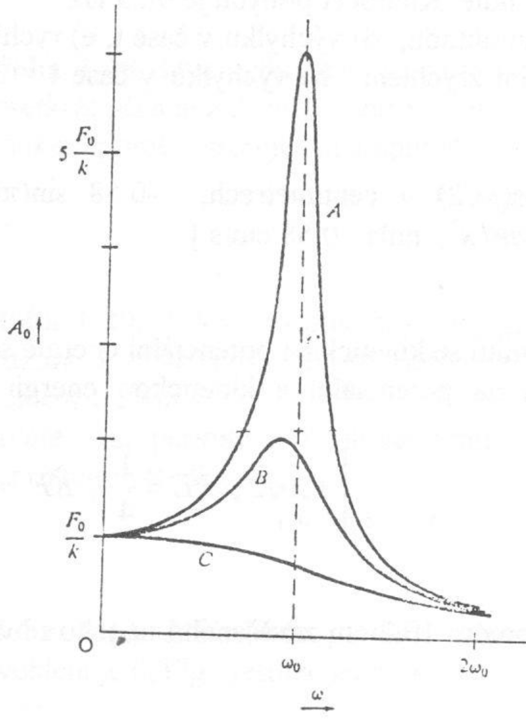
$$A_{0\max} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2m\delta\omega_1},$$

kde ω_1 je úhlová frekvence tlumených kmitů, když by nepůsobila budicí síla.
Případ, kdy budicí síla má takovou frekvenci, že amplituda vynucených kmitů dosahuje maximální hodnoty se nazývá **rezonancí** mezi vlastními kmity a budicí silou.

U netlumených kmitů je $\delta=0$ a tedy maximum amplitudy by mělo nastat při úhlové frekvenci budící síly právě rovné vlastní frekvenci, $\Omega=\omega$ (viz. (2)). V tomto případě však amplituda vynucených kmitů roste nade všechny meze. Reálně se s tímto případem nesetkáváme, neboť vždy působí, byť i malý odpor, takže konstanta tlumení δ je vždy větší než nula.

Bude-li $\Omega=\omega$ pak rychlost a tedy i kinetická energie vynucených kmitů při průchodu rovnovážnou polohou nabývají maximální hodnoty. Tento případ nazýváme **rezonancí rychlosti** vynucených kmitů.

Rezonance má praktický význam pouze při malém tlumení, když konstanta tlumení je značně menší než vlastní úhlová frekvence, $\delta \ll \omega$. Potom lze ve vzorci (2) zanedbat $2\delta^2$ proti ω^2 a můžeme za rezonanci považovat prostě případ, kdy frekvence budicí síly je stejně velká jako vlastní frekvence, $\Omega=\omega$. Při malém tlumení dosahuje prakticky současně maxima jak amplituda vynucených kmitů, která je pak přibližně



$$A_{0\max} \approx \frac{F_0}{2m\delta\omega},$$

tak i jejich rychlost a energie.

Závislost energie vynucených kmitů na budicí frekvenci při různém tlumení pak udávají tvz. **rezonanční křivky**, které jsou tím strmější (rezonance je tím ostřejší), čím menší je tlumení. (Na obr. pro křivku C je konstanta tlumení tak velká, že křivka nemá již žádný vrchol.)

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣

Úloha 1-19. Výchylka netlumených kmitů je popsána funkcí

$$x = 3.8 \cos(7\pi t/4 + \pi/6) ,$$

kde t je v sekundách, x v metrech a konstanty v závorce v radiánech.
Určete : a) periodu a kmitočet, b) výchylku a rychlost v čase t = 0, c) rychlost a zrychlení v čase t = 2 s.

[7/8 s, 8/7 Hz, 3.3 m, -10.4 m/s, 18.1 m/s, -57.4 m/s^2]

$f = \frac{7}{8}$ Hz, $T = \frac{8}{7}$ s

Úloha 1-20. Výchylka netlumených kmitů je popsána funkcí

$$x = 6\cos(3\pi t + \pi/3)\ ,$$

kde x je v metrech, t v sekundách a konstanty v závorce v radiánech. Určete výchylku, rychlost, zrychlení a fázový úhel pro čas t = 2 s. Dále vypočítejte kmitočet a periodu kmitů.

[3 m; -49 m/s; -270 m/s^2; 20 rad; 1.5 Hz; 0.67 s]

Úloha 1-21. Objekt koná netlumené kmity kolem bodu x = 0. V čase t = 0 je jeho výchylka x = 0,37 cm a jeho rychlost je rovna nule. Kmitočet pohybu je 0,25 Hz.
Určete : a) periodu, b) úhlovou rychlost, c) amplitudu, d) výchylku v čase t, e) rychlost v čase t, f) maximální rychlost, g) maximální zrychlení, h) výchylku v čase t = 3 s, i) rychlost v čase t = 3 s.

[4 s; $\pi/2$ rad/s; 0.37 cm; 0.37 cos(πt/2) v centimetrech; -0.58 sin(πt/2) v centimetrech za sekundu; 0.58 cm/s; 0.91 cm/s^2; nula; 0.58 cm/s]

Úloha 1-22. Při jaké výchylce netlumených kmitů se kinetická a potenciální energie sobě rovnají? Jaká část celkové energie připadá na potenciální a kinetickou energii při výchylce rovné polovině amplitudy?

$$\left[\pm A\sqrt{2}\,;\ PE = \frac{1}{4}\ ;\ KE = \frac{3}{4}\right]$$

Úloha 1-23. Perioda malých kmitů disku poloměru 10,2 cm zavěšeného na jeho obvodě je 0,784 s.
Vypočítejte velikost tíhového zrychlení .
(Nápověda: prostuduj úlohu 1-13.)

$$\left[g = 9.82\ ms^{-2}\right]$$

Úloha 1-24. Horizontálně orientovaná pružina při natažení silou 18 N má délku 145 cm. Bude-li tato síla 22,5 N, pružina má délku 168 cm.
Vypočítejte tuhost k pružiny.

[19.6 N/m]

Úloha 1-25. Napište rovnici pro výchylku pružiny, která při počáteční výchylce 20 cm z rovnovážné polohy a následném uvolnění, má periodu kmitů 0,75 s. Dále určete výchylku v okamžiku t = 1,8 s.

$$\left[x = 20\cos\left(\frac{2\pi\, t}{0.75}\right)\ ,\quad -16cm\right]$$

Úloha 1-26. Těleso hmotnosti m je podpíráno dvěma rovnoběžnými vertikálně orientovanými pružinami, jejichž tuhost k je stejná.
Určete kmitočet volných kmitů tělesa.

$$\left[f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}\right]$$

Úloha 1-27. Těleso hmotnosti m připojíme ke konci volně zavěšené pružiny. Po uvolnění začne těleso padat. Po uražení dráhy 30 cm se zastaví a vrací se zpět vzhůru. Za předpokladu, že jeho kmity budou netlumené, určete kmitočet těchto kmitů

[1.3 Hz]

Úloha 1-28. Dva netlumené kmitavé pohyby mají stejný kmitočet. Energie prvního je desetkrát větší než druhého, zároveň jeho tuhost k je dvakrát větší.
V jakém poměru jsou jejich amplitudy?

$$\left[A_1 = A_2\sqrt{5}\right]$$

Úloha 1-29. Těleso hmotnosti 650 g je upoutáno na konci horizontálně orientované pružiny k = 84 N/m. Úderem vedeným horizontálním směrem je mu udělena počáteční rychlost 1,26 m/s.
Určete : a) periodu a kmitočet kmitů, b) jejich amplitudu, c) maximální zrychlení, d) průběh výchylky.

[0.55 s; 1.81 Hz; 0.111 m; 14.3 m/s^2; x = 0.111 cos(11.4 t)]

Úloha 1-30. Jaká bude perioda matematického kyvadla na Marsu, kde gravitační zrychlení je 0,37g , jestliže jeho perioda na Zemi je 0,8 s.

[0.49 s]

Úloha 1-31. Jaká je perioda matematického kyvadla délky 60 cm

a) na povrchu země,

b) když se nachází ve výtahu, který klesá volným pádem ?

[1.6 s; nekonečně velká]

Úloha 1-32. Vyjádřete maximální rychlost kmitů matematického kyvadla pomocí jeho délky a úhlu počáteční výchylky.

$$\left[v = \sqrt{2gL(1-\cos\varphi)}\right]$$

Úloha 1-33. Matematické kyvadlo délky 1m koná 100 kmitů za 204 s. Vypočítejte tíhové zrychlení v místě jeho polohy.

[9.49 m/s^2]

Úloha 1-34. Těleso hmotnosti 4 kg protáhne svisle zavěšenou pružinu o 16 cm. Určete periodu kmitů, kmitá-li na této pružině těleso hmotnosti 0.5 kg.

[0.28 s]

Úloha 1-35. Odvoďte vzorec pro amplitudu vynucených kmitů A_0 , jak je uveden na straně 20.

Úloha 1-36. Odvoďte vzorec pro frekvenci vynucených kmitů (viz.str.20), při které jejich amplituda dosahuje maximální hodnoty.

Úloha 1-37. Určete maximální hodnotu amplitudy vynucených kmitů.

$$\left[A_{0\max} = \frac{F_0}{2m\delta\omega_1} \right]$$

Úloha 1-38. Amplituda rychlosti vynucených kmitů se rovná součinu $\Omega . A_0$. Ukažte, že její maximum je právě pro $\Omega=\omega$. Poté odvoďte maximální hodnotu kinetické energie vynucených kmitů.

$$\left[E_{k\max} = \frac{F_0}{8m\delta^2} \right]$$