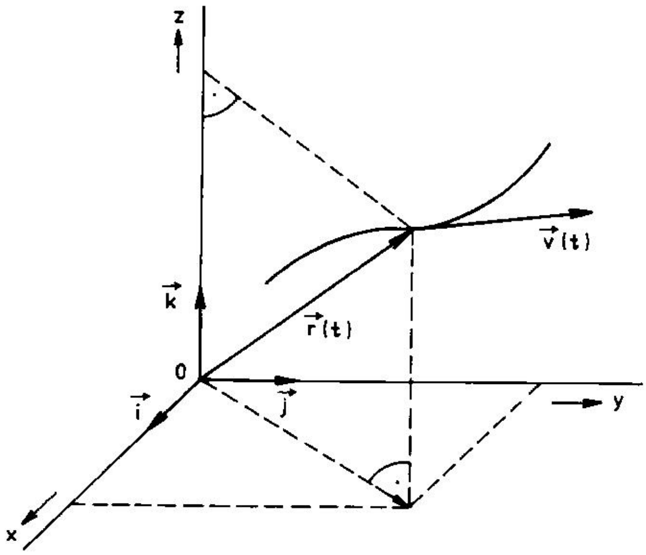
1. MECHANIKA

1.1. Kinematika hmotného bodu

Kinematika vyšetřuje pohyb v prostoru a čase, nezabývá se příčinou pohybu, tj. silou. Vyšetřuje pouze, jak závisí poloha, resp. dráha, rychlost a zrychlení pohybu na čase.

I) Popis pohybu hmotného bodu



Dráha pohybu je popsána, známe-li pro každý okamžik souřadnice x, y, z pohybujícího se hmotného bodu, tj. jeho polohový vektor

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,.$$

Koncový bod časově proměnného polohového vektoru opisuje křivku, po které se bod pohybuje a kterou nazýváme dráha (trajektorie) pohybu.

Vektor rychlosti $\vec{v}$ pohybu je dán derivací polohového vektoru podle času:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}\,.$$

Vektor rychlosti má směr tečny trajektorie.

Velikost rychlosti je dána:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,.$$

Vektor zrychlení $\vec{a}$ pohybu je dán derivací vektoru rychlosti podle času:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}\,.$$

Velikost zrychlení je dána:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}\,.$$

Vektor rychlosti a polohový vektor pohybu, je-li dán vektor zrychlení $\vec{a}$ pohybu, jsou dány integrály

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}\,dt + \vec{v}_0\,; \qquad \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}\,dt + \vec{r}_0\,,$$

kde integrační konstanty $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ jsou polohový vektor a vektor rychlosti na počátku pohybu, tj. pro t = 0.

Pro pohyb s konstantním zrychlením $\vec{a}$ můžeme dále psát

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}\,dt + \vec{v}_0 = \vec{a}\,t + \vec{v}_0$$

a

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}\,dt + \vec{r}_0 = \int_0^t (\vec{a}\,t + \vec{v}_0)\,dt + \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 + \vec{v}_0\,t + \vec{r}_0\,.$$

Je-li takový pohyb přímočarý, jsou všechny vektory v obou výrazech kolineární a tyto vektorové rovnice přejdou na skalární tvary, které jsou uvedeny později.

Jde-li o pohyb v homogenním tíhovém poli, pak zrychlení, s nímž se v tomto poli pohybuje volný hmotný bod, je rovno tíhovému zrychlení, tj.

$$\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{konst}}.$$

Pro rychlost takového pohybu platí

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{g}\,dt = \vec{g}\,t + \vec{v}_0\,,$$

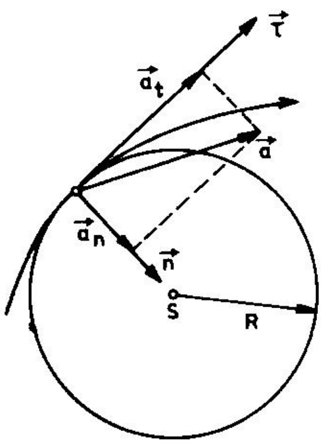
kde integrační konstanta $\vec{v}_0$ je vektor počáteční rychlosti bodu pro čas $t = 0$.

Časová závislost polohového vektoru je dána

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}\,dt = \int_0^t (\vec{g}\,t + \vec{v}_0)\,dt = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0\,,$$

kde integrační konstanty $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ jsou polohový vektor a vektor rychlosti v čase $t = 0$.

Rozklad vektoru zrychlení na:



a) Zrychlení tečné $\vec{a}_t$ - což je složka vektoru zrychlení $\vec{a}$ ve směru tečny trajektorie:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\vec{\tau}\,,$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor tečny.

Velikost tečného zrychlení a_t je dána:

$$a_t = \frac{dv}{dt}\,.$$

b) Zrychlení normálové $\vec{a}_n$ - což je složka vektoru zrychlení $\vec{a}$ ve směru hlavní normály k trajektorii:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}\,,$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor hlavní normály, R je poloměr křivosti v daném bodě dráhy.

Velikost normálového zrychlení a_n je dána:

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,.$$

Mezi oběma složkami platí:

$$\vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{a}\,, \qquad a_t^2 + a_n^2 = a^2\,.$$

·J e   n u t n o   p ř í s n ě   r o z l i š o v a t   m e z i

velikostí vektoru celkového zrychlení

$$a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

a velikostí vektoru tečného zrychlení

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} .$$

II) Veličiny charakterizující pohyb přímočarý

a) R o v n o m ě r n ý $(a = 0)$

dráha s $[m]$: $s = v_0 t + s_0$ (v_0, s_0 - rychlost, dráha na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$),

rychlost v $[m.s^{-1}]$: $v = \text{konst} = v_0$ (rychlost je konstantní - nezávisí na čase),

zrychlení a $[m.s^{-2}]$: $a = 0$ (zrychlení je nulové).

b) R o v n o m ě r n ě z r y c h l e n ý $(a = \text{konst} = a_0 \neq 0)$

$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$ (v_0, s_0 - rychlost, dráha na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$),

$v = at + v_0$ (rychlost roste úměrně s časem; v_0 - rychlost na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$),

$a = \text{konst} = a_0 \neq 0$ (zrychlení je konstantní - nezávisí na čase).

c) N e r o v n o m ě r n ě z r y c h l e n ý $(a \neq \text{konst})$

$$s = \int_0^t v\, dt$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \; ; \quad v = \int_0^t a\, dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \; ; \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

III) Přímočaré pohyby s tíhovým zrychlením g

a) V o l n ý p á d : ze vztahů pro pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený, dosazením $s_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g$, plynou vztahy pro dráhu a rychlost:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 ,$$

$$v = gt .$$

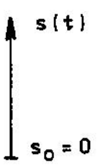
b) V r h s v i s l ý d o l ů : ze vztahů pro pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený, dosazením $s_0 = 0$, $a = g$, plynou vztahy pro dráhu a rychlost:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t ,$$

$$v = gt + v_0 ,$$

kde v_0 je počáteční rychlost pohybu.

c) V r h s v i s l ý v z h ů r u : ze vztahů pro pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený, dosazením $s_0 = 0$, $a = - g$, plynou vztahy pro dráhu a rychlost:



$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 ,$$

$$v = v_0 - gt ,$$

kde v_0 je počáteční rychlost pohybu.

IV) Veličiny charakterizující pohyb po kružnici

a) **R o v n o m ě r n ý** $(\varepsilon = 0)$

úhel otočení φ : $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ (ω_0, φ_0 - úhlová rychlost, úhel na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$)

úhlová rychlost $\omega\,[s^{-1}]$: $\omega = \text{konst} = \omega_0$ (úhlová rychlost je konstantní - nezávisí na čase)

úhlové zrychlení $\varepsilon\,[s^{-2}]$: $\varepsilon = 0$ (úhlové zrychlení je nulové)

doba oběhu T $[s]$

frekvence f $[s^{-1}]$: $f = \frac{1}{T}$

úhlová rychlost $\omega\,[s^{-1}]$: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

obvodová rychlost v $[m.s^{-1}]$: $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f r = \omega r$ (r - poloměr dráhy; obvodová rychlost je konstantní)

normálové zrychlení a_n $[m.s^{-2}]$:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 4\pi^2 f^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

tečné zrychlení a_t $[m.s^{-2}]$: $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$

b) **R o v n o m ě r n ě z r y c h l e n ý** $(\varepsilon = \text{konst} = \varepsilon_0 \neq 0)$

$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ (ω_0, φ_0 - úhlová rychlost, úhel na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$)

$\omega = \varepsilon t + \omega_0$ (úhlová rychlost roste úměrně s časem; ω_0 - úhlová rychlost na počátku pohybu, tj. pro $t = 0$)

$\varepsilon = \text{konst} = \varepsilon_0 \neq 0$ (úhlové zrychlení je konstantní - nezávisí na čase)

c) **N e r o v n o m ě r n ě z r y c h l e n ý** $(\varepsilon \neq \text{konst})$

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \qquad \omega = \int_0^t \varepsilon\, dt$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}; \qquad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Ú l o h a 1: Pohyb hmotného bodu je dán vektorovou rovnicí

$$\vec{r}(t) = (2t + 5)\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\,\vec{k} \qquad [m]$$

Pro libovolný čas t a pak pro čas $t_1 = 3$ s určete:

a) jeho souřadnice a vzdálenost od počátku,

b) vektory rychlosti a zrychlení a jejich velikost,

c) zrychlení tečné a normálové.

Vypočtěte dráhu pohybu mezi okamžiky $t_1 = 3$ s a $t_2 = 6$ s.

Řešení: a) $x(t) = 2t + 5$, $y(t) = -t^2$, $z(t) = \frac{1}{3}t^3$, což jsou tzv. parametrické rovnice pohybu.

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(2t + 5)^2 + t^4 + \frac{1}{9}t^6} \qquad [m]$$

Pro $t_1 = 3$ s je poloha hmotného bodu dána souřadnicemi

$$x(t_1) = 2.3 + 5 = 11 \text{ m}, \quad y(t_1) = -3^2 = -9 \text{ m}, \quad z(t_1) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9 \text{ m}$$

a jeho vzdálenost od počátku je

$$r(t_1) = \sqrt{11^2 + 9^2 + 9^2} = \sqrt{283} \text{ m}.$$

b)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k} \qquad [ms^{-1}]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\,\vec{j} + 2t\,\vec{k} \qquad [ms^{-2}]$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2 \qquad [ms^{-1}]$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{4 + 4t^2} \qquad [ms^{-2}]$$

pro $t_1 = 3$ s:
$$\vec{v}(t_1) = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 9\,\vec{k} \qquad [ms^{-1}]$$

$$\vec{a}(t_1) = -2\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \qquad [ms^{-2}]$$

$$v(t_1) = |\vec{v}(t_1)| = 11 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a(t_1) = \sqrt{4 + 4.3^2} = \sqrt{40} \text{ m.s}^{-2}$$

c)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + 2) = 2t \qquad [ms^{-2}]$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} = 2 \text{ m.s}^{-2}$$ (zrychlení je konstantní - nezávisí na čase t)

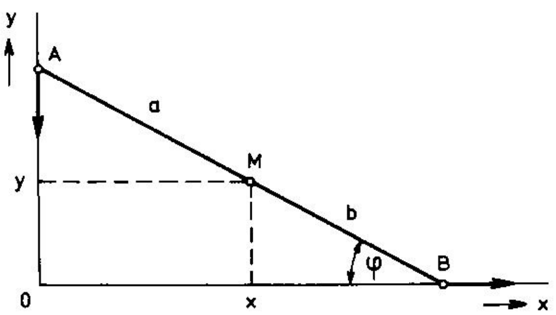
Pro $t_1 = 3$ s:
$$a_t(t_1) = 6 \text{ m.s}^{-2}$$

$$a_n(t_1) = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

Dráha pohybu mezi okamžiky $t_1 = 3$ s a $t_2 = 6$ s je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_3^6 (t^2 + 2)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_3^6 = 69 \text{ m.}$$

Úloha 2: Tyč konstantní délky se pohybuje tak, že její koncový bod A se pohybuje podél osy y a koncový bod B podél osy x pravoúhlé souřadnicové soustavy (x, y). Jakou dráhu opisuje bod M tyče, jestliže pohyb tyče začal z její vertikální polohy a skončil v okamžiku, kdy dosáhla polohy horizontální.



Řešení: Poloha bodu M je dána souřadnicemi

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

neboli

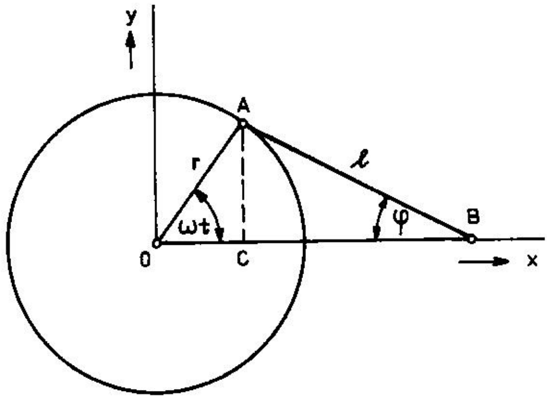
$$\frac{x}{a} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

Umocněním a sečtením rovnic dostaneme vztah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bod M se tedy pohybuje z počáteční polohy (0, b) do konečné polohy (a, 0) po oblouku elipsy s poloosami a, b.

Ú l o h a 3 : Vyšetřete pohyb bodu B na tyči délky ℓ (viz obrázek), jestliže se kloub A pohybuje konstantní úhlovou rychlostí ω po kružnici poloměru r , je-li bod B nucen se pohybovat podél osy x . Zvlášť vysvětlete případ $\ell = r$.



Řešení: Okamžitá poloha bodu B v libovolném čase je dána

$$x_B(t) = \overline{OC} + \overline{CB} = r\cos\omega t + \ell|\cos\varphi| .$$

Ze sinové věty plyne

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\omega t} = \frac{r}{\ell} ,$$

odtud

$$\sin\varphi = \frac{r}{\ell}\sin\omega t \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\omega t} .$$

Tedy

$$x_B(t) = r\cos\omega t + \ell\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\omega t} = r\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\omega t} .$$

Pro $\omega t = 0$ je $x_B = r + \ell$

$\omega t = \pi$ je $x_B = \ell - r$

Pro $\ell > r$ leží x-ová souřadnice bodu B v intervalu $x \in \langle \ell - r, \ell + r\rangle$. Je-li $\ell = r$, pak poloha bodu B je dána

$$x_B(t) = 2r\cos\omega t .$$

V tomto případě se bod B pohybuje v intervalu $x \in \langle 0, 2r\rangle$.

Ú l o h a 4 : Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku $t_1 = 90$ s má hodnotu $a_1 = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Určete:

a) závislost rychlosti a dráhy pohybu na čase,

b) rychlost a uraženou dráhu pro čas $t = t_1$,

c) rychlost a uraženou dráhu pro čas $t = t_2 = 10$ s.

Řešení: Jde o pohyb nerovnoměrně zrychlený. Zrychlení pohybu roste rovnoměrně s časem, takže

$$a(t) = kt ,$$

kde k určíme ze zadaných hodnot

$$k = \frac{a_1}{t_1} .$$

Potom:

a) $$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t \frac{a_1}{t_1} t\,dt = \frac{a_1}{2t_1} t^2 ,$$

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{a_1}{2t_1} t^2 dt = \frac{a_1}{6t_1} t^3 .$$

b) Dosazením $t = t_1$ je

$$v(t_1) = \frac{a_1}{2} t_1 ,$$

$$s(t_1) = \frac{a_1}{6} t_1^2 ,$$

číselně pro $t_1 = 90$ s je $v(90) = 22{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $s(90) = 675$ m.

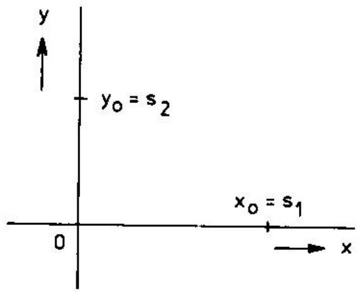
c) Dosazením $t = t_2$ je

$$v(t_2) = \frac{a_1}{2t_1} t_2^2 ,$$

$$s(t_2) = \frac{a_1}{6t_1} t_2^3 ,$$

číselně pro $t_2 = 10$ s je $v(10) \doteq 0{,}26\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $s(10) \doteq 0{,}92$ m.

<u>Úloha 5:</u> Po ramenech pravého úhlu se pohybují směrem k vrcholu dva body rychlostmi v_1, v_2. V čase t_o jsou jejich vzdálenosti od vrcholu s_1, s_2. Určete okamžik, kdy bude jejich vzdálenost nejmenší a vypočtěte ji ($v_1 = 15\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $v_2 = 20\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $s_1 = 15$ m, $s_2 = 10$ m).



<u>Řešení:</u> Položíme $t_o = 0$, tzn. že čas počítáme od okamžiku, kdy $x_o = s_1$, $y_o = s_2$.
První bod pohybující se k vrcholu po ose x má v čase t souřadnice

$$x_1 = x_o - v_1 t ,$$
$$y_1 = 0.$$

Druhý bod má v čase t souřadnice

$$x_2 = 0 ,$$
$$y_2 = y_o - v_2 t .$$

V čase t je tedy jejich vzdálenost

$$\ell = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_o - v_1 t)^2 + (y_o - v_2 t)^2} .$$

Minimum této funkce nalezneme z podmínky

$$\frac{d\ell}{dt} = 0 .$$

Odtud dostaneme, že v čase

$$t = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

je vzdálenost obou bodů nejmenší a je dána výrazem

$$\ell = \frac{s_1 v_2 - s_2 v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} .$$

Pro zadané hodnoty dostáváme

$$t = 0{,}68\ \mathrm{s},$$
$$\ell = 6\ \mathrm{m}.$$

Ú l o h a 6 : Těleso urazilo po sobě dva stejné úseky délky s za čas t_1 a t_2 se stejným zrychlením. Vypočtěte zrychlení pohybu a rychlost na počátku prvního úseku ($s = 10$ m, $t_1 = 1{,}06$ s, $t_2 = 2{,}2$ s).

Řešení: Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Pro první úsek platí:

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 ,$$

kde v_0 je rychlost na začátku prvního úseku. Rychlost na konci prvního úseku je

$$v_1 = v_0 + a t_1 .$$

Pro druhý úsek platí:

$$s = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = (v_0 + a t_1)t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 .$$

Máme dvě rovnice pro neznámé a, v_0. Odtud

$$a = \frac{2 s(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} ,$$

$$v_0 = s \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2 t_1 t_2}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} .$$

Dosazením daných hodnot vychází

$$a = -3 \text{ m.s}^{-2}, \qquad v_0 = 11 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ú l o h a 7 : Zrychlení pohybu je rovno $a = 0{,}3$ m.s^{-2}. Určete, za jaký čas se urazí první a desátý metr dráhy pohybu a jaká je rychlost pohybu po uražení 10 m.

Řešení: Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený, pro který platí

$$v = a t, \qquad s = \frac{1}{2} a t^2,$$

když $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ pro $t = 0$.

Čas t_1, za který proběhne první metr dráhy ($s_1 = 1$ m), se rovná

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = 2{,}58 \text{ s}.$$

Čas t^*, za který proběhne desátý metr dráhy, je dán

$$t^* = t_{10} - t_9 ,$$

kde t_9 a t_{10} jsou doby, za které se urazí dráhy $s_9 = 9$ m a $s_{10} = 10$ m, pro které platí

$$s_9 = \frac{1}{2} a t_9^2 , \qquad s_{10} = \frac{1}{2} a t_{10}^2 .$$

Odtud

$$t^* = \sqrt{\frac{2s_{10}}{a}} - \sqrt{\frac{2s_9}{a}} = 0{,}4 \text{ s}.$$

Rychlost po uzavření dráhy $s_{10} = 10$ m se rovná

$$v_{10} = a t_{10} = \sqrt{2a\, s_{10}} = 2{,}45 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ú l o h a 8 : Účinnost brzd umožňuje zastavit vlakovou soupravu mající rychlost 72 km.h^{-1} za 2 minuty. V jaké vzdálenosti od místa stanice je nutné uvést brzdy do chodu, budeme-li pohyb vlaku po čas brzdění považovat za rovnoměrně zrychlený?

Řešení: Ze vztahů pro pohyb rovnoměrně zrychlený

$$v = v_0 + a\,t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

a z podmínky, že pro $t = 120$ s musí $v = 0$, dostaneme zrychlení pohybu při brzdění soupravy

$$a = -\frac{v_0}{t}$$

a dráha uražená po dobu brzdění až do zastavení soupravy je rovna

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} v_0 t = \frac{1}{2} v_0 t\,.$$

Číselně:

$$a = -\frac{20}{120} = -\frac{1}{6}\ \mathrm{m.s^{-1}},$$

$$s = \frac{1}{2}\, 20.120 = 1200\ \mathrm{m}.$$

Je tedy nutné uvést brzdy do chodu ve vzdálenosti 1200 m před stanicí.

Úloha 9 : Jak velikou počáteční rychlostí v_0 je nutné vymrštit kámen svisle vzhůru, aby dosáhl výšky h ?

Řešení: Rychlost a dráha při vrhu svislém jsou dány vztahy

$$v = v_0 - g\,t, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2.$$

Při dosažení výšky h je rychlost pohybu $v = 0$. Doba t_1, za kterou bude této výšky dosaženo, je tedy rovna

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\,.$$

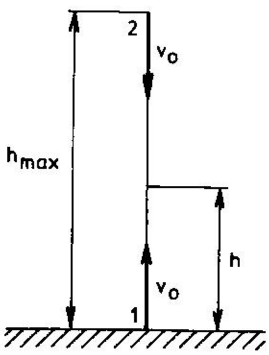
Výška h je pak dána

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Počáteční rychlost v_0 pro dosažení výšky h je tedy dána vztahem

$$v_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

Úloha 10 : Těleso koná vrh svislý s počáteční rychlostí $v_0 = 4{,}9\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Současně z výšky, které toto těleso maximálně dosáhne, začíná padat druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí v_0. Určete čas t^* , ve kterém se obě tělesa střetnou, vzdálenost h od povrchu zemského, ve které se střetnou, a rychlosti v_1^*, v_2^* obou těles v okamžiku střetnutí.



Řešení: Dráha a rychlost prvního tělesa jsou popsány vztahy

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2, \qquad v_1 = v_0 - g\,t\,,$$

pro druhé těleso pak vztahy

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g\, t^2, \qquad v_2 = v_0 + g\,t.$$

Maximální výšku dosáhne první těleso v čase t_m, pro který platí $v_1 = 0$, tj.

$$t_m = \frac{v_0}{g}\,.$$

Maximální výška, které první těleso dosáhne, je pak rovna

$$h_{max} = \frac{v_o^2}{g} - \frac{1}{2}\,\frac{v_o^2}{g} = \frac{1}{2}\,\frac{v_o^2}{g} .$$

V okamžiku střetnutí platí

$$s_1 + s_2 = h_{max} ,$$

tj.

$$v_o t^* - \frac{1}{2}\,g t^{*2} + v_o t^* + \frac{1}{2}\,g t^{*2} = \frac{v_o^2}{2g} ,$$

tedy platí

$$2 v_o t^* = \frac{v_o^2}{2g} ,$$

kde t^* je čas, ve kterém se obě tělesa střetnou, a ten je roven

$$t^* = \frac{v_o}{4g} = 0{,}125 \text{ s}.$$

Vzdálenost h od povrchu zemského, ve které se tělesa střetnou, je pak dána

$$h = v_o t^* - \frac{1}{2}\,g t^{*2} = \frac{v_o^2}{4g} - \frac{v_o^2}{32g} = \frac{7v_o^2}{32g} = 0{,}53 \text{ m}.$$

Rychlosti těles v okamžiku střetnutí se rovnají

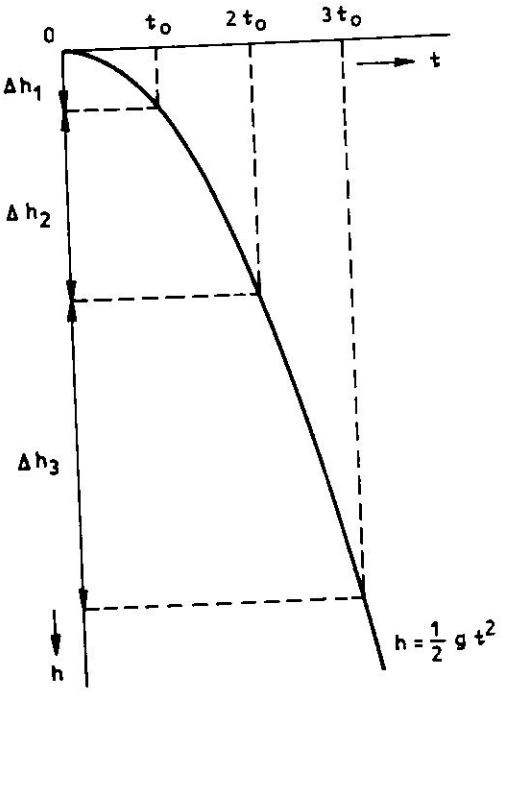
$$v_1^* = v_o - g t^* = v_o - \frac{v_o}{4} = \frac{3}{4}\,v_o = 3{,}67 \text{ m.s}^{-1},$$

$$v_2^* = v_o + g t^* = v_o + \frac{v_o}{4} = \frac{5}{4}\,v_o = 6{,}12 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ú l o h a 11 : Dráhu h tělesa volně padajícího ve vakuu rozdělte na n částí, které mají tu vlastnost, že doba t_o , potřebná k jejich proběhnutí, je pro všechny části stejná.

Řešení: Délky úseků, které splňují tuto podmínku, označme

$$\Delta h_1,\ \Delta h_2,\ \Delta h_3,\ \ldots,\ \Delta h_n .$$



Musí platit

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \ldots + \Delta h_n = h = \frac{1}{2}\,g (n\,t_o)^2 ,$$

odtud

$$t_o^2 = \frac{2h}{gn^2} .$$

Je tedy (viz obrázek):

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2}\,g\,t_o^2 = \frac{h}{n^2} ,$$

$$\Delta h_2 = h(2t_o) - h(t_o) = \frac{1}{2}\,g(2t_o)^2 - \frac{1}{2}\,g t_o^2 = \frac{3h}{n^2} ,$$

$$\Delta h_3 = h(3t_o) - h(2t_o) = \frac{1}{2}\,g(3t_o)^2 - \frac{1}{2}\,g(2t_o)^2 = \frac{5h}{n^2} ,$$

$$\vdots$$

$$\Delta h_n = h(nt_o) - h\left[(n-1)t_o\right] = \frac{1}{2} g(nt_o)^2 - \frac{1}{2} g \left[(n-1)t_o\right]^2 =$$

$$= \frac{2n-1}{n^2} h .$$

Např. pro $h = 1000$ m, $n = 10$, mají tyto úseky délky: 10, 30, 50, ..., 170, 190 m. Přitom musí platit

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = 1000 \text{ m}.$$

Ú l o h a 12 : Vyšetřete pohyb hmotného bodu v tíhovém poli, jestliže na počátku pohybu byl jeho polohový vektor ve zvolené soustavě souřadnic $\vec{r}_o = 0$ a vektor jeho rychlosti $\vec{v}_o$ svíral úhel α_o s horizontální rovinou. Určete:

a) časovou závislost velikosti rychlosti pohybu,

b) parametrické rovnice pohybu,

c) rovnici dráhy pohybu.

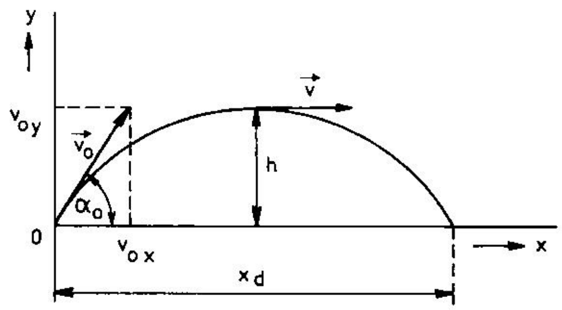
Jelikož výsledným pohybem je šikmý vrh, stanovte dále:

a) dobu výstupu,

b) výšku výstupu,

c) dobu doletu,

d) vzdálenost doletu.



Řešení: Jde o pohyb křivočarý se zrychlením, které v každém bodě je rovno tíhovému zrychlení konstantní velikosti a stálého směru: $\vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{konst}$. Vektor tíhového zrychlení v soustavě souřadnic podle obrázku je vyjádřen: $\vec{g} = -g\,\vec{j}$.

Rychlost pohybu je pak dána

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{g}\, dt = \vec{g}\, t + \vec{v}_o , \qquad \text{(I)}$$

kde $\vec{v}_o$ je vektor počáteční rychlosti v čase $t = 0$, a polohový vektor hmotného bodu je dán

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\, dt = \int_0^t (\vec{g}\, t + \vec{v}_o)\, dt = \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \vec{v}_o\, t + \vec{r}_o , \qquad \text{(II)}$$

kde $\vec{r}_o$ je polohový vektor hmotného bodu v čase $t = 0$.

Jestliže hmotný bod je v čase $t = 0$ v počátku soustavy souřadnic a vektor $\vec{v}_o$ svírá úhel α_o (elevační úhel) s horizontální rovinou, potom

$$\vec{r}_o(x_o, y_o, 0) \Rightarrow x_o = y_o = 0 ,$$

$$v_{ox} = v_o \cos\alpha_o, \quad v_{oy} = v_o \sin\alpha_o ,$$

$$\vec{g} = (0, -g, 0) .$$

Ze vztahů (I), (II) pak plyne:

Složky vektoru rychlosti pohybu jsou

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos\alpha_o ,$$

$$v_y = -gt + v_{oy} = -gt + v_o \sin\alpha_o$$

Velikost rychlosti je potom

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2} \, .$$

Pro složky polohového vektoru dostáváme

$$x = v_0 t \cos \alpha_0 \, ,$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t \sin \alpha_0 \, .$$

To jsou parametrické rovnice pohybu. Vyloučením parametru-času máme rovnici dráhy pohybu

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 \, ,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem ve vrcholu dráhy a s vertikální osou y.

Dobu výstupu t_v určíme ze vztahu $v_y = 0$:

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \, .$$

Výšku výstupu h vypočítáme, dosadíme-li čas výstupu t_v do vztahu pro souřadnici y :

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} \, .$$

Dobu doletu t_d určíme ze vztahu pro souřadnici y a to z podmínky $y = 0$:

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} = 2t_v \, .$$

Vzdálenost doletu x_d vypočítáme, dosadíme-li čas doletu t_d do vztahu pro souřadnici x :

$$x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} \, .$$

Je zřejmé, že pro $\vec{v}_0 = 0$ přechází pohyb popsaný vztahy (I), (II) ve volný pád; je-li $\vec{v}_0 \neq 0$ a $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, máme vrh svislý vzhůru, pro $\alpha_0 = 0$ vrh vodorovný, pro $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ vrh šikmý.

Úloha 13 : Pod jakým elevačním úhlem α musí být vystřelena střela počáteční rychlostí v_0, aby zasáhla cíl $C(x_1, y_1)$?

Řešení: Rovnice dráhy šikmého vrhu byla odvozena v úloze 12 :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \, .$$

Dosadíme-li

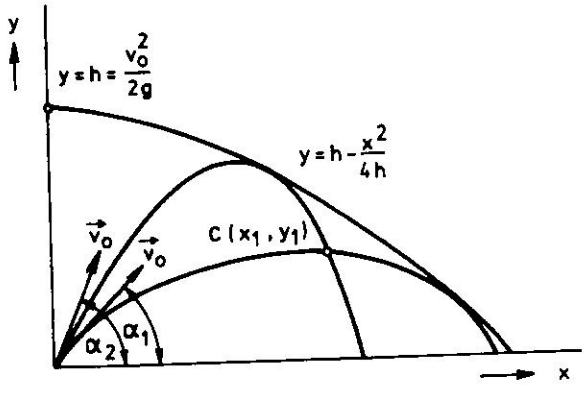
$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \, ,$$

má tato rovnice tvar

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x^2 \, .$$

Této rovnici musí vyhovovat souřadnice cíle x_1, y_1. Označíme-li $v_0^2/2g = h$ (rychlostní výška), máme po úpravě pro hledaný úhel α kvadratickou rovnici

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{4h}{x_1} \operatorname{tg} \alpha + 1 + \frac{4h}{x_1^2} y_1 = 0 \, .$$



Kořeny této rovnice jsou

$$(\operatorname{tg}\alpha)_{1,2} = \frac{1}{x_1}\left(2h \pm \sqrt{4h(h - y_1) - x_1^2}\right).$$

Diskriminant

$$D = 4h(h - y_1) - x_1^2 .$$

Odtud vyplývá:

1) je-li $D < 0$ cíl nelze zasáhnout,
2) je-li $D = 0$ cíl lze zasáhnout jen jediným způsobem,
3) je-li $D > 0$ cíl lze zasáhnout dvěma způsoby.

Z podmínky $D = 0$ plyne rovnice tzv. ochranné paraboly:

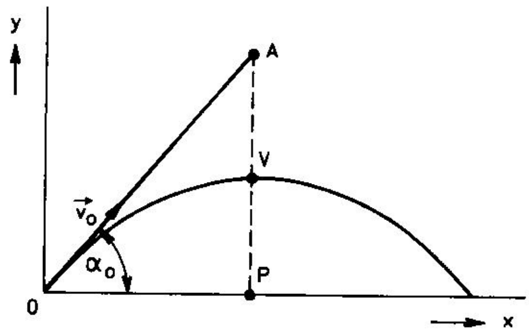
$$y = h - \frac{x^2}{4h} .$$

Každý cíl vně této paraboly je nedosažitelný.

Úloha 14 : Dokažte, že vrchol V dráhy, kterou opisuje hmotný bod při šikmém vrhu ve vakuu, je v polovině výšky, které by dosáhl za stejnou dobu přímočarým pohybem pod stejným elevačním úhlem.

Řešení: Maximální výška vrhu je

$$h = \overline{PV} = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} .$$



Té bude dosaženo za čas

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} .$$

Za stejný čas by urazil hmotný bod přímočarým pohybem pod elevačním úhlem α_0 vzdálenost

$$\overline{OA} = v_0 t_v = \frac{v_0^2 \sin \alpha_0}{g} .$$

Z obrázku plyne, že

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \sin \alpha_0 .$$

Odtud

$$\overline{PA} = \overline{OA} \sin \alpha_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} = 2\,\overline{PV} = 2h .$$

Úloha 15 : Úhel otáčení bodu pohybujícího se po kružnici závisí na čase vztahem $\varphi = k_1 t + k_2 t^3$, kde $k_1 = \pi/10\ s^{-1}$, $k_2 = \pi/40\ s^{-3}$.

a) Určete hodnoty okamžité úhlové rychlosti ω a okamžitého úhlového zrychlení ε v časech $t_1 = 4$ s a $t_2 = 6$ s.

b) Určete velikosti průměrné úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ a průměrného úhlového urychlení $\bar{\varepsilon}$ mezi začátkem páté a koncem šesté sekundy pohybu.

Řešení:

a)
$$\omega(t) = \dot{\varphi} = k_1 + 3k_2 t^2 \Rightarrow \omega(t_1) = k_1 + 3k_2 t_1^2 = 1{,}3\,\pi s^{-1},$$
$$\omega(t_2) = k_1 + 3k_2 t_2^2 = 2{,}8\,\pi s^{-1}.$$

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega} = 6k_2 t \Rightarrow \varepsilon(t_1) = 6k_2 t_1 = 0{,}6\,\pi s^{-2},$$
$$\varepsilon(t_2) = 6k_2 t_2 = 0{,}9\,\pi s^{-2}.$$

b) $$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{k_1 t_2 + k_2 t_2^3 - (k_1 t_1 + k_2 t_1^3)}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{k_1(t_2 - t_1) + k_2(t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1} = \frac{k_1(t_2 - t_1) + k_2(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2)(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} =$$

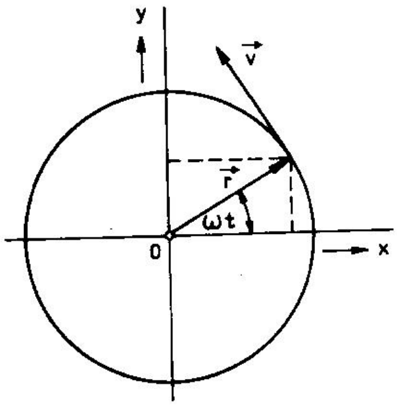
$$= k_1 + k_2(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2) = 2\pi\,s^{-1}.$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{k_1 + 3k_2 t_2^2 - (k_1 + 3k_2 t_1^2)}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{3k_2(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = 3k_2(t_2 + t_1) = 0{,}75\,\pi\,s^{-2}.$$

Úloha 16 : Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru r rovnoměrným pohybem s úhlovou rychlostí ω. Určete: jeho polohový vektor, vektor rychlosti a vektor celkového zrychlení, velikost tečného a normálového zrychlení.

Řešení: Skalární parametrické rovnice pohybu jsou $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$.



Polohový vektor hmotného bodu je pak dán

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = r(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t).$$

Vektor rychlosti je

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -\vec{i}\,r\,\omega\sin\omega t + \vec{j}\,r\,\omega\cos\omega t.$$

Vektor zrychlení je

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\vec{i}\,r\,\omega^2\cos\omega t - \vec{j}\,r\,\omega^2\sin\omega t =$$

$$= -r\omega^2(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}.$$

Vektor $\vec{a}$ má opačnou orientaci než polohový vektor, tj. směřuje do středu dráhy. Je tedy totožný s vektorem normálového zrychlení $\vec{a}_n = \vec{a}$. Protože $\vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{a}$, musí vektor tečného zrychlení $\vec{a}_t = 0$.

Velikost celkového zrychlení je shodná s velikostí normálového zrychlení

$$a = a_n = |\vec{a}| = |\vec{a}_n| = \omega^2 r.$$

Úloha 17 : Vodorovná kruhová deska poloměru R se otáčí kolem osy jdoucí jejím středem kolmo na její rovinu, s konstantní úhlovou rychlostí ω_0. Od středu se pohybuje současně předmět podél poloměru s konstantní rychlostí v_0.

Pro pohybující se předmět určete:

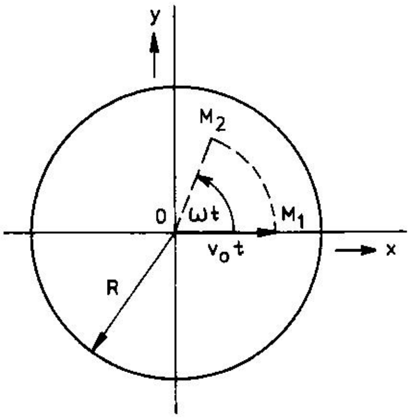
a) jeho polohový vektor v závislosti na čase,

b) vektor rychlosti a její velikost,

c) kdy, kde a s jakou rychlostí dosáhne obvodu desky.

Řešení: Z principu nezávislosti můžeme předpokládat, že za čas t se nejprve vykoná pohyb podél poloměru, tj. $\overline{SM_1} = v_0 t$ a pak s deskou kruhový pohyb o úhel ωt.

Souřadnice výsledné polohy v M_2 budou:



$$x = \overline{SM_2}\cos\omega_0 t = v_0 t\cos\omega_0 t\,,$$
$$y = \overline{SM_2}\sin\omega_0 t = v_0 t\sin\omega_0 t\,,$$
$$z = 0\,.$$

a) Jeho polohový vektor je dán vztahem

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,v_0 t\cos\omega_0 t + \vec{j}\,v_0 t\sin\omega_0 t\,,$$

b) $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} =$$
$$= \vec{i}\,(v_0\cos\omega_0 t - v_0\omega_0 t\sin\omega_0 t) +$$
$$+ \vec{j}\,(v_0\sin\omega_0 t + v_0\omega_0 t\cos\omega_0 t)\,,$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(v_0\cos\omega_0 t - v_0\omega_0 t\sin\omega_0 t)^2 + (v_0\sin\omega_0 t + v_0\omega_0 t\cos\omega_0 t)^2} =$$
$$= v_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}.$$

c) Čas, za který urazí dráhu poloměru R rovnoměrným pohybem s konstantní rychlostí v_0 je roven $t_1 = \frac{R}{v_0}$.

Souřadnice místa jsou: $$x = v_0 t_1\cos\omega_0 t_1 = R\cos\frac{\omega_0 R}{v_0}\,,$$
$$y = v_0 t_1\sin\omega_0 t_1 = R\sin\frac{\omega_0 R}{v_0}\,.$$

Rychlost, se kterou dosáhne obvodu, je

$$v = v_0\sqrt{1+\omega_0^2 t_1^2} = v_0\sqrt{1+\frac{\omega_0^2 R^2}{v_0^2}}\,.$$

Ú l o h a 18 : Setrvačník se otáčí s frekvencí $n = 1500$ ot/min. Brzděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas $t_0 = 30$ s od začátku brzdění. Určete úhlové zrychlení a počet otáček, které vykoná od začátku brzdění až do zastavení.

Řešení: Okamžitá hodnota úhlové rychlosti rovnoměrně zrychleného kruhového pohybu je dána

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t\,,$$

kde

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi\frac{1500}{60} = 50\,\pi\,s^{-1}\,.$$

V čase $t = t_0$ je $\omega(t) = \omega(t_0) = \omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$; odtud

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{50\,\pi}{30} = -\frac{5}{3}\pi\,s^{-2}.$$

Za čas t_0 se opíše úhel

$$\alpha_0 = \int_0^{t_0}\omega(t)\,dt = \int_0^{t_0}(\omega_0 + \varepsilon t)\,dt = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t_0^2 =$$
$$= 50\,\pi.30 - \frac{5}{6}\pi\,900 = 1500\,\pi - 750\,\pi = 750\,\pi\,.$$

Potom počet otáček vykonaných za čas t_0 je

$$N = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \frac{750\,\pi}{2\pi} = 375.$$

Úloha 19 : Kolo na hřídeli se začíná roztáčet z klidu a za dobu $t = 20$ s dosáhne 200 otáček za minutu. Jaké je úhlové zrychlení za předpokladu, že je během roztáčení konstantní? Kolikrát se za tuto dobu otočí?

Řešení: Úhlová rychlost kola je $\omega = 2\pi n$, kde $n = \frac{200}{60}$ udává počet otáček za sekundu.

Úhlová rychlost v okamžiku t je tedy $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi.200}{60} \doteq 21\ s^{-1}$.

Začíná-li pohyb v klidu, bude úhlové zrychlení rovno

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} \doteq \frac{21}{20} = 1{,}05\ s^{-2}.$$

Úhel opsaný za dobu t je

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega\, dt = \int_0^t \varepsilon t\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{1}{2}\ 1{,}05.20^2 = 210.$$

Za čas $t = 20$ s se tedy kolo otočí

$$N = \frac{210}{2\pi} \doteq 33{,}4.$$

Úloha 20 : Jaká je počáteční rychlost pohybu rovnoměrně zpožděného se zrychlením $a = -1{,}2\ m.s^{-2}$, jestliže do zastavení pohybu byla uražena dráha 135 m?

[$v_o = 18\ m.s^{-1}$]

Úloha 21 : Jaká je rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu v čase $t = 10$ s, jestliže pro $t = 0$ byla jeho rychlost nulová, když za čas $t_1 = 25$ s byla uražena dráha 110 m?

[$v = 3{,}2\ m.s^{-1}$]

Úloha 23 : Určete zrychlení rovnoměrně zpožděného pohybu, klesne-li jeho rychlost na dráze 100 m z hodnoty 60 $km.h^{-1}$ na hodnotu 40 $km.h^{-1}$?

[$a = -0{,}78\ m.s^{-2}$]

Úloha 23 : Dva objekty se pohybují proti sobě se zrychleními $a_1 = 6\ m.s^{-2}$, $a_2 = 4\ m.s^{-2}$ a počátečními rychlostmi $v_{01} = 10\ m.s^{-1}$, $v_{02} = 15\ m.s^{-1}$. Jejich počáteční vzdálenost $s = 750$ m. Určete čas jejich setkání.

[$t = 10$ s]

Úloha 24 : Dvě tělesa se začnou k sobě pohybovat ze vzdálenosti 100 m. První těleso pohybem rovnoměrným s $v_1 = 3\ m.s^{-1}$, druhé pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením $a = 4\ m.s^{-2}$ a s počáteční rychlostí $v_o = 7\ m.s^{-1}$. Určete čas a polohu místa jejich setkání.

[$t = 5$ s ;
15 m od počáteční polohy prvního tělesa]

Úloha 25 : Volně padající těleso urazilo posledních h metrů své dráhy za dobu t . Vypočtěte výšku h_x , ze které těleso padalo.

[$h_x = \frac{h^2}{2gt^2} + \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}gt^2$]

Úloha 26 : Z výšky 195 m nad zemským povrchem padá určité těleso. Ve stejný okamžik je druhé těleso vrženo z povrchu zemského svisle vzhůru rychlostí $v_o = 65\ m.s^{-1}$. Kdy a v jaké výšce se setkají?

[t = 3 s; h = 151 m]

Úloha 27 : Vypočtěte počáteční rychlost tělesa při vrhu svislém a výšku, které dosáhlo, jestliže se vrátilo zpět na zem za 20 s.

[$v_o = 98\ m.s^{-1}$; h = 490,5 m]

Úloha 28 : Jakou dráhu vykoná objekt za poslední sekundu volného pádu z výšky h = 78,5 m?

[s = 34,4 m]

Úloha 29 : Jaká je počáteční rychlost tělesa při vrhu svislém dolů z výšky h = 122 m, má-li za poslední sekundu svého pohybu urazit polovinu celkové dráhy?

[$v_o = 44,2\ m.s^{-1}$]

Úloha 30 : Střela je vypuštěna s počáteční rychlostí $v_o = 1000\ m.s^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha_o = 55^o$. Určete teoretickou délku dostřelu x a teoretickou maximální výšku h , kterých by střela mohla dosáhnout.

[x = 95,7 km; h = 34,1 km]

Úloha 31 : Objekt v přímé vzdálenosti d pozorujeme pod zorným úhlem $\varphi = 60^o$. Jaký je elevační úhel α výstřelu při počáteční rychlosti v_o , aby byl objekt zasažen, jestliže začne padat současně s výstřelem (odpor vzduchu zanedbáváme).

[$\alpha = \varphi$]

Úloha 32 : Hmotný bod koná pohyb po kružnici poloměru r = 20 cm s konstantním zrychlením $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Vypočítejte velikost tečného, normálového a celkového zrychlení na konci 4. sekundy pohybu.

[$a_t = 0,4\ m.s^{-2}$, $a_n = 12,80\ m.s^{-2}$, $a = 12,81\ m.s^{-2}$]

Úloha 33 : Jaký je poloměr kola, jestliže při jeho otáčivém pohybu má bod na jeho obvodě 3krát větší rychlost jako bod, který je o 10 cm blíže k ose otáčení?

[r = 0,15 m]

Úloha 34 : Kolo se začíná z klidu otáčet s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Určete, kolikrát se otočí za prvních 15 s.

[N = 35,8]

Úloha 35 : Kolo se roztáčí rovnoměrně zrychleně tak, že za prvních 5 s vykoná 12,5 otáček. Určete jeho úhlovou rychlost na konci páté sekundy.

[$\omega = 10\ \pi\ s^{-1}$]