Příklad 1

Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně v_1 =360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé x_1 =1,8 km ?

$[2,78 \text{ m.s}^{-2}]$

Příklad 2

Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.

V čase 0,200 s se nachází ve výšce 0,544 m.

a) jaká je jeho počáteční rychlost ? $[3,701 \text{ m.s}^{-1}]$

b) jaká je jeho rychlost v zadané výšce ? $[1,739 \text{ m.s}^{-1}]$

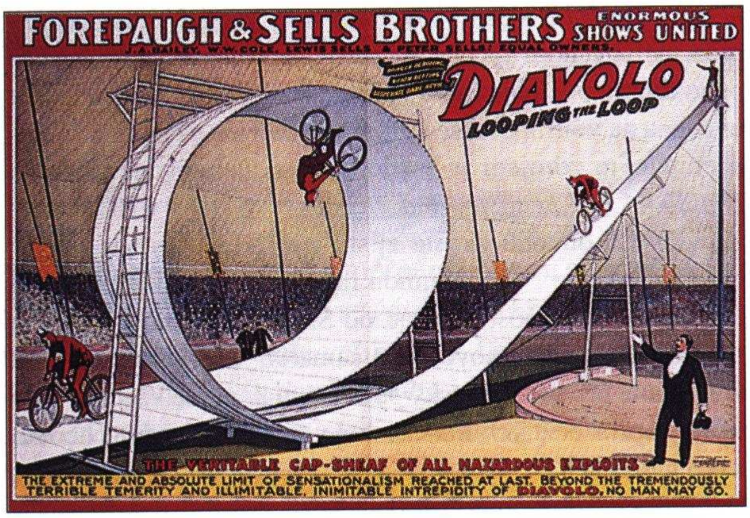
c) jak vysoko ještě vyletí ? $[0,154 \text{ m}]$

Příklad 3

Jaká je perioda otáčení pouťové centrifugy o poloměru 5 m, jestliže v horní poloze působí na mírně vyděšeného cestujícího výsledné zrychlení a=g směrem nahoru ? Osa centrifugy je vodorovná, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. $[3,17 \text{ s}]$

Příklad 4

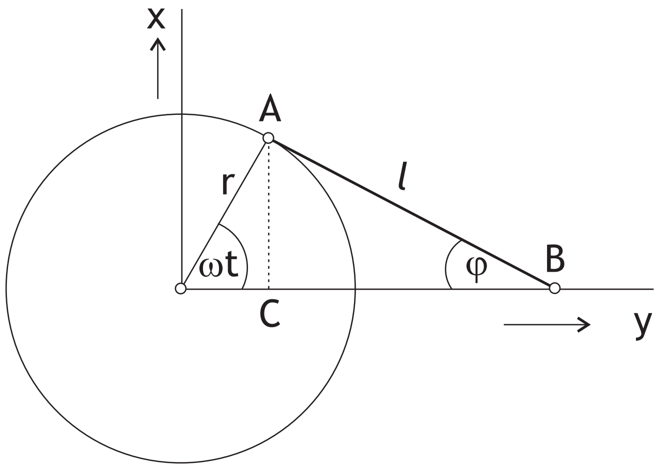
Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo "Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (viz. obr). Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr R=2,7 m. Jakou nejmenší rychlostí mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?



[$5,15$ m.s^{-1}]

Příklad 5

Vyšetřete pohyb bodu B na tyči délky l (viz obrázek 1), jestliže se kloub A pohybuje konstantní úhlovou rychlostí ω po kružnici poloměru r, je-li bod B nucen se pohybovat podél osy x. Zvlášť vysvětlete případ $l = \mathrm{r}$.



Obrázek 1: Pohyb bodu B.

Řešení:

Poloha bodu v libovolném čase:

$$x_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{CB}} = \mathrm{r}\cos\omega t + l|\cos\varphi| \qquad (1)$$

Ze sinové věty plyne:

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{r}}{l}\sin\omega t \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{\mathrm{r}^2}{l^2}\sin^2\omega t} \tag{2}$$

Tedy

$$x_{\mathrm{B}} = \mathrm{r}\cos\omega t + l\sqrt{1-\frac{\mathrm{r}^2}{l^2}\sin^2\omega t} = r\,\cos\omega t + \sqrt{l^2-\mathrm{r}^2\sin^2\omega t} \tag{3}$$

$$\text{Pro} \quad \omega t = 0 \quad \text{je} \quad x_{\mathrm{B}} = \mathrm{r} + l$$

$$\omega t = \pi \quad \text{je} \quad x_{\mathrm{B}} = l - \mathrm{r}$$

Pro $l > \mathrm{r}$ leží x-ová souřadnice bodu B v intervalu $x \in \langle l-\mathrm{r}, l+\mathrm{r}\rangle$. Je-li $l = \mathrm{r}$, pak poloha bodu B je daná:

$$x_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{2\mathrm{r}\cos\omega t}}. \tag{4}$$

a x-ová souřadnice bodu B je v intervalu $\underline{\underline{x \in \langle 0, 2\mathrm{r}\rangle}}$.

Příklad 6

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku $t_1 = 90\,\mathrm{s}$ má hodnotu $a_1 = 0{,}5\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Určete uraženou dráhu pro čas $t_1 = 90\,\mathrm{s}$. [675 m]

Příklad 7

Pod jakým elevačním uhlem α musí byt vystřelená střela počáteční rychlostí $v_0 = 500$ m.s^{-1}, aby zasáhla cíl C vzdálený $x_1 = 20$ km, ve výšce $y_1 = 1$ km? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . Vypočtenou elevaci vyjádřete ve stupních.

$[\{63,2^o; 29,7^o\}]$

Příklad 8

Setrvačník se otáčí s frekvencí $n = 1500\,\mathrm{ot.min^{-1}}$. Brzděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas $t_0 = 30\,\mathrm{s}$ od začátku brzdění. Určete úhlové zrychlení ε a počet otáček, které vykoná od začátku brzdění až do zastavení. [375 ot]

Příklad 9

Určete, jakou silou působí na kolejnici následkem rotace Země vlak hmotnosti $m = 5.10^5\,\mathrm{kg}$, jedoucí rychlostí $v' = 72\,\mathrm{km.h^{-1}}$ po poledníku od severu k jihu na severní polokouli v místě zeměpisné šířky $\varphi = 50^o$. $[1110,8\ \mathrm{N}]$

Příklad 10

Vypočítejte práci proměnné síly $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ po dráze dané parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$ (parabola) z bodu $\mathrm{A}_1(1,1)$ do bodu $\mathrm{A}_2(-1,1)$. (Síla je zadaná v newtonech) $\left[\frac{14}{15}\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 11

Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze AB a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze BC, na které se zastaví. Určete koeficient tření. Úhel $\alpha = 10^o$, dráhy AB=$s_1 = 1000$ m, BC=$s_2 = 100$ m.

$[0,16]$

Příklad 12

Z vrcholu dokonale hladké koule poloměru $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod. Určete:

a) vertikální polohu místa od vrcholu koule, ve kterém opustí povrch koule,

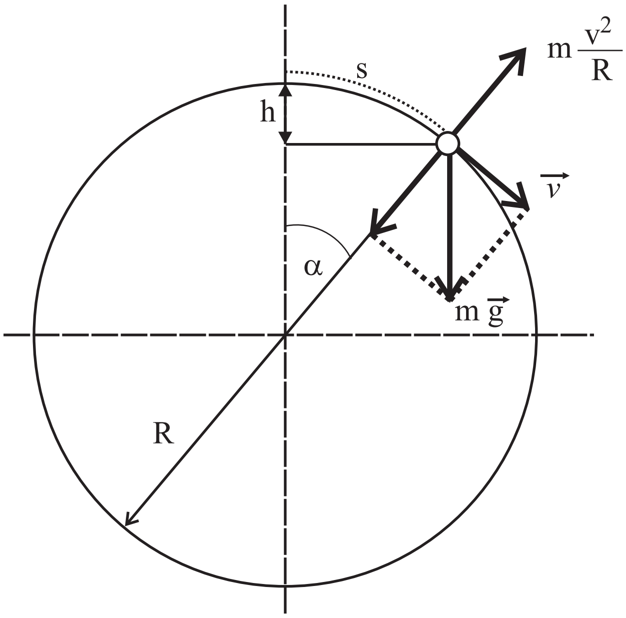
b) jakou dráhu do toho okamžiku urazil,

c) velikost rychlosti, se kterou opustí povrch koule.

Předpokládejte, že $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Řešení:

V místě, ve kterém hmotný bod opustí povrch koule, se musí radiální složka síly tíhy rovnat odstředivé



Obrázek 2: Koule – pohyb hmotného bodu.

síle:

$$m\,g\,\cos\alpha = m\,\frac{v^2}{R}, \tag{1}$$

kde

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad g\,(R-h) = v^2. \tag{2}$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že pokles potenciální energie hmotného bodu se rovná přírůstku jeho kinetické energie:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v^2 = 2\,g\,h. \tag{3}$$

Potom:

$$g(R-h) = 2\,g\,h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{R}{3} = \underline{\underline{0{,}5\,\mathrm{m}}}, \tag{4}$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \underline{\underline{3{,}13\,\mathrm{m.s^{-1}}}}, \tag{5}$$

$$s = R\,\alpha = R\,\arccos\frac{2}{3} = \underline{\underline{1{,}26\,\mathrm{m}}}. \tag{6}$$

Příklad 13

Po zachycení střely se poloha těžiště balistického kyvadla zvýší o $l = 2$ cm. Určete rychlost střely v. Hmotnost střely je rovna $m = 20$ g, hmotnost balistického kyvadla je rovna $M = 10$ kg.

$[313,8 \text{ m.s}^{-1}]$

Příklad 14

Dvě koule o hmotnostech m_1, m_2, přičemž $m_1 = 2m_2$, jsou zavěšeny ve stejné výšce a vzájemně se dotýkají. Kouli s vyšší hmotností vychýlíme do výšky $h = 1$ m a pustíme. Určete, jaké výšky dosáhnou obě koule po rázu, který považujeme za dokonale pružný. $\left[h_1 = \frac{1}{9} \text{ m}; \;\; h_2 = \frac{16}{9} \text{ m}\right]$

Příklad 15

Dvě loďky plují na klidné (neproudící) vodě proti sobě rovnoběžným směrem. Když se míjejí, vymění si vzájemně stejně těžký pytel hmotnosti M=50 kg. Následkem toho se druhá loďka zastaví a první se pohybuje dále v původním směru rychlostí u_1=8,5 m.s^{-1}. Stanovte rychlosti v_1 a v_2 loďek před tím, než si vyměnily pytle. Hmotnosti loďek i s pytlem jsou m_1=1000 kg, m_2=500 kg.

[9 m.s^{-1}] [−1 m.s^{-1}]

Příklad 16

Homogenní nosník hmotnosti $m = 5$ tun a délky $l = 10$ metrů spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti $x = 2$ metry od jednoho konce je zatížen hmotností $m_1 = 1$ tuna. Určete síly reakce v obou podpěrách na koncích nosníku, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

[32373 N] [26487 N]

Příklad 17

U stěny je postaven žebřík. Jeho koeficient tření o stěnu je $f_1 = 0,55$, o zem $f_2 = 0,8$. Určete minimální úhel vzhledem k horizontální rovině, při kterém žebřík nespadne působením vlastní váhy.

$[19,29^o]$

Příklad 18

Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru $R = 2$ m. $\left[[0, 0, \frac{3}{4}]\right]$

Příklad 19

Určete moment setrvačnosti homogenní tyče délky $d = 1$ m a hmotnosti $m = 1$ kg vzhledem k ose která prochází středem tyče kolmo na její směr $\left[\frac{1}{12}\ \mathrm{kg.m}^2 \doteq 0{,}0833\ \mathrm{kg.m}^2\right]$

Příklad 20

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose procházející jejím středem.

Řešení:

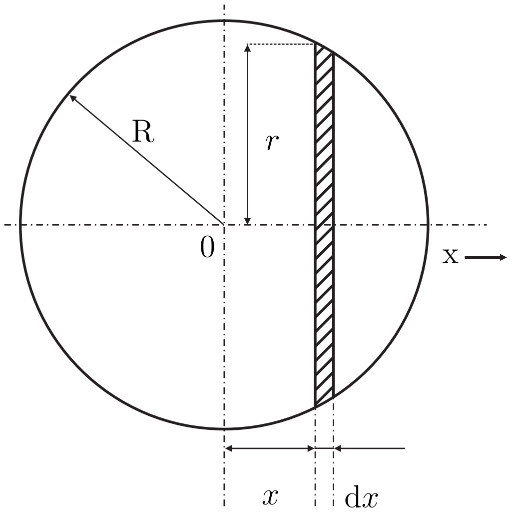
Ve vzdálenosti x od středu 0 si zvolíme elementární válec poloměru $r = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$ a výšky dx, který má shodnou osu rotace jako koule. Jeho hmotnost je $\mathrm{d}m = \pi\, \varrho\, \mathrm{d}x$. Pro moment setrvačnosti tohoto elementárního válce můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J &= \frac{1}{2} r^2\, \mathrm{d}m = \frac{1}{2} r^2\, \pi\, r^2\, \varrho\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}J &= \frac{1}{2}\, \pi\, \varrho \left(\mathrm{R}^2\, - x^2\right)^2\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti koule je potom:

$$J = \int\limits_{x=-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \mathrm{d}J = \frac{1}{2}\, \pi\, \rho \int\limits_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \left(\mathrm{R}^2\, - \, x^2\right)^2\, \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{2}{5} m\, \mathrm{R}^2}}\,, \tag{1}$$

kde $\underline{\underline{M = \frac{4}{3}\pi\, \mathrm{R}^3\, \varrho}}$ je hmotnost koule.



Obrázek 3: Moment setrvačnosti homogenní koule.

Příklad 21

Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní válec. Určete jeho rychlost v bodě B a čas potřebný k proběhnutí dráhy $s = \overline{\mathrm{AB}}$.

Řešení:

Ze zákona zachování mechanické energie

$$m\,g\,s\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2. \tag{1}$$

Dosadíme-li

$$J = \frac{1}{2}\,m\,r^2 \qquad a \qquad \omega = \frac{v}{r},$$

dostávame pro rychlost v bodě B:

$$v = 2\sqrt{\frac{g\,s\,\sin\alpha}{3}}\,. \tag{2}$$

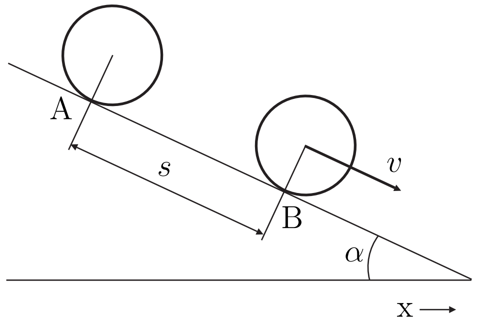
Čas, potřebný k proběhnutí dráhy s, stanovíme ze vztahu pro rychlost:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{g\,\sin\alpha}}\,\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}\,. \tag{3}$$

Integrací dostáváme:

$$t = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3s}{g\,\sin\alpha}}}}\,, \tag{4}$$

za předpokladu, že pro t=0 je v=0.



Obrázek 4: Nakloněná rovina.

Příklad 22

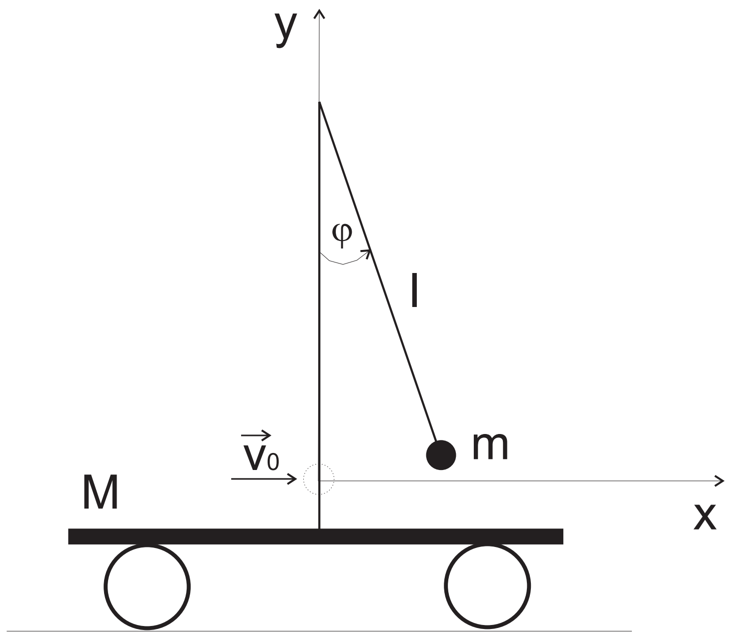
Vypočítejte oběžnou rychlost a vzdálenost od Země pro stacionární družici. Hmotnost Země $M = 5,983.10^{24}$ kg, poloměr Země $R = 6378$ km, gravitační konstanta $\varkappa = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

$[v \doteq 3076\,\mathrm{m.s^{-1}}]$ $[h \doteq 35\,810\,\mathrm{km}]$

Příklad 23

Uvažujme mechanickou soustavu, která je zachycena na obrázku 5. Jedná se o vozík, který se pohybuje bez tření a hmotnost jeho kol zanedbáváme. Hmotnost vozíku je $M = 10$ kg. Na tomto vozíku je umístěno matematické kyvadlo, tj. kyvadlo s nehmotným závěsem délky $l = 1$ m, na jehož konci se nachází koule o hmotnosti $m = 10$ kg. V čase $t = 0$ se nachází uvažovaný mechanický systém v klidu. V tomto čase je kuličce matematického kyvadla udělena počáteční rychlost v_0. Uvažovaný systém je tímto uveden do pohybu a naším úkolem je vyšetřit pohyb matematického kyvadla a vozíku, přičemž předpokládáme, že pro maximální úhlovou výchylku matematického kyvadla platí $\varphi_{max} \lesssim 5°$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . Jaká je perioda kyvu kyvadla?

Řešení:



Obrázek 5: Vozík s matematickým kyvadlem.

Řešení:

Nejprve si vyjádříme polohu vozíku a kuličky v kartézských souřadnicích. Souřadnice s indexem 1 budou příslušet vozíku a souřadnice s indexem 2 budou příslušet kuličce.

Pro vozík tedy máme

$$x_1(t) = x(t) \ , \tag{1}$$

$$y_1(t) = 0 \ . \tag{2}$$

Pro kuličku platí

$$x_2(t) = x(t) + l \sin \varphi(t) \ , \tag{3}$$

$$y_2(t) = l - l \cos \varphi(t) = l[1 - \cos \varphi(t)] \ . \tag{4}$$

Provedeme časovou derivaci výše uvedených souřadnic

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \ , \tag{5}$$

$$\dot{y}_1 = 0 \ , \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi\ , \tag{7}$$

$$\dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi\ . \tag{8}$$

Pro kinetickou energii celého systému obecně dostáváme, že

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\ . \tag{9}$$

Jednotlivé rychlosti vyjádříme pomocí (5), (6), (7) a (8). Po malé úpravě dostaneme

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)\ . \tag{10}$$

Jestliže uplatníme předpoklad, že $\varphi_{max} \lesssim 5°$, potom je možné zjednodušit výraz pro kinetickou energii tím, že položíme $\cos\varphi \doteq 1$. Tímto dostaneme, že

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2\ . \tag{11}$$

Pro potenciální energii celého systému obecně platí, že

$$U = Mgy_1 + mgy_2\ , \tag{12}$$

kde g reprezentuje velikost tíhového zrychlení. Jednotlivé souřadnice vyjádříme pomocí (2) a (4). Pro potenciální energii tak dostáváme:

$$U = mgl(1 - \cos\varphi)\ . \tag{13}$$

Nyní si vyjádříme Lagrangeovu funkci $L = T - U$ pomocí rovnic (11) a (13) jako

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 + mgl(\cos\varphi - 1)\ . \tag{14}$$

Jelikož se jedná o systém s dvěma stupni volnosti $s = 2$, dostáváme soustavu dvou Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \ , \quad j = 1, 2 \ , \tag{15}$$

kde $q_1 = x$ a $q_2 = \varphi$. Provedeme příslušné derivace Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ , \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\varphi}) \ , \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) \ , \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \ , \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml(\dot{x} + l\dot{\varphi}) \ , \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) \ . \tag{21}$$

Opět využijeme předpokladu, že $\varphi_{max} \lesssim 5°$, který nám dovoluje položit $\sin\varphi \doteq \varphi$, což použijeme ve výrazu (19), čímž dostáváme

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\varphi \ . \tag{22}$$

Dosazením výrazů (16), (18) a (21), (22) do rovnice (15) dostáváme následující soustavu Lagrangeových rovnic

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) = 0 \ , \tag{23}$$

$$ml(\ddot{x} + l\ddot{\varphi}) + mgl\varphi = 0 \ . \tag{24}$$

Abychom mohli vyšetřit pohyb matematického kyvadla a vozíku bude nutné vyřešit soustavu diferenciálních rovnic (23) a (24) s následujícími počátečními podmínkami: poloha vozíku na počátku

$$x(t = 0) = 0 \ , \tag{25}$$

počáteční rychlost vozíku

$$\dot{x}(t=0) = 0 \; , \tag{26}$$

počáteční poloha kyvadla

$$\varphi(t=0) = 0 \; , \tag{27}$$

počáteční rychlost kyvadla

$$\dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_0}{l} \; . \tag{28}$$

Počáteční podmínka vychází ze vztahu [1]

$$v(t=0) = v_0 = \omega(t=0)l = \dot{\varphi}(t=0)l \; . \tag{29}$$

Při řešení uvedené soustavy diferenciálních rovnic budeme postupovat tak, že si nejdříve z rovnice (23) vyjádříme

$$\ddot{x} = \frac{ml}{M+m}\ddot{\varphi} \tag{30}$$

a dosadíme do druhé z rovnic, tj. do (24), čímž po úpravě dostaneme

$$\frac{M}{m+M}\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \; , \tag{31}$$

což dále upravíme do tvaru

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2\varphi = 0 \; , \tag{32}$$

kde

$$\Omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}} \; . \tag{33}$$

Řešením rovnice (32) dostáváme

$$\varphi(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t) \; . \tag{34}$$

[1] vyjádření složek rychlosti v polárních souřadnicích.

S ohledem na okrajovou podmínku (27) dostáváme, že $B = 0$, takže

$$\varphi(t) = A\sin(\Omega t)\ . \tag{35}$$

Zderivujeme rovnici (35) podle času, abychom mohli určit integrační konstantu A

$$\dot{\varphi}(t) = A\Omega\cos(\Omega t)\ . \tag{36}$$

Konstantu A dostaneme z počáteční podmínky (28), pro kterou dospějeme k rovnosti

$$A = \frac{v_0}{\Omega l}\ , \tag{37}$$

tedy

$$\varphi = \frac{v_0}{\Omega l}\sin(\Omega t)\ . \tag{38}$$

Dosazením rovnice (38) do rovnice (30) dostaneme

$$\ddot{x} = \frac{mv_0}{M+m}\Omega\sin(\Omega t)\ . \tag{39}$$

Provedeme integraci rovnice (39) podle času

$$\dot{x}(t) = -\frac{mv_0}{M+m}\cos(\Omega t) + C_1\ , \tag{40}$$

kde integrační konstantu C_1 určíme z počáteční podmínky (26), takže

$$C_1 = \frac{mv_0}{M+m}\ . \tag{41}$$

Dosazením integrační konstanty C_1 do rovnice (40) dostáváme

$$\dot{x}(t) = -\frac{mv_0}{M+m}\cos(\Omega t) + \frac{mv_0}{M+m}\ . \tag{42}$$

Opět zintegrujeme rovnici (42) podle času a dospějeme k následující rovnici

$$x(t) = \frac{mv_0}{M+m}t - \frac{mv_0}{(M+m)\Omega}\sin(\Omega t) + C_2 \; . \tag{43}$$

Integrační konstantu C_2 určíme z počáteční podmínky (25) a dostaneme, že $C_2 = 0$. Tímto jsme vyřešili příslušnou soustavu diferenciálních rovnic (23) a (24). Takže pohyb matematického kyvadla je dán rovnicí (38) a pohyb vozíku je popsán rovnicí (43), tj.

$$\varphi = \frac{v_0}{l\Omega}\sin(\Omega t) \; , \tag{44}$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{M+m}t - \frac{mv_0}{(M+m)\Omega}\sin(\Omega t) \; . \tag{45}$$

Z řešení je patrné, že se bude jednat o periodický pohyb s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{Ml}{(M+m)g}} \; . \tag{46}$$

číselně bude perioda pohybu rovna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{10 \text{ kg } 1 \text{ m}}{(10 \text{ kg } + 10 \text{ kg})\; 9,81 \text{ m.s}^{-2}}} = \underline{\underline{1,42 \text{ s}}} \tag{47}$$

Příklad 24

Železniční vagón se pohybuje po vodorovné přímé trati. Brzdíme jej silou, která se rovná jedné desetině jeho tíhy. Vypočítejte čas měřený od začátku brždění za který se vagón zastaví a dráhu, kterou urazí od začátku brždění do zastavení. V okamžiku začátku brždění má vagón rychlost 72 km.h^{-1}.

[20 s] [200 m]

Příklad 25

Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_I=421800 km s periodou T_I=1,769 dne.

Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_M=2,55.10^{-3} AU s periodou T_M=27,322 dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země. Astronomická jednotka 1 AU je rovna 149,598.10^6 km. [315]

Příklad 26

Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od r_{MP}=363300 km v perigeu do r_{MA}=405500 km v apogeu, perioda oběhu Měsíce kolem Země je T_M=27,322 dne. Umělá družice se pohybuje po eliptické dráze nad rovníkem tak, že v perigeu je ρ_{DP}=225 km nad povrchem Země a v apogeu je ρ_{DA}=710 km. Rovníkový poloměr Země je R_Z=6378 km. Určete periodu oběhu umělé družice T_D.

[$0,0649$ dne = 1,56 h = 1 h 34 min]

Příklad 27

Rotor elektromotoru s hmotností 110 kg má moment setrvačnosti 2 kg.m^2 a koná 20 otáček za sekundu. Jak velkou má kinetickou energii? [$15,8$ kJ]

Příklad 28

Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak hmotnosti 300 t, pohybující se po vodorovné trati, zvětšil svou rychlost z 36 km.h^{-1} na 54 km.h^{-1} ? Neuvažujeme ztráty třením a vliv odporu vzduchu. [$18,75$ MJ]

Příklad 29

Jaká je frekvence netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti m =2 g, je-li amplituda $A = 10$ cm a celková energie hmotného bodu $W = 1$ J ? [$50,35$ Hz]

Příklad 30

Jaký je logaritmický dekrement útlumu Λ tlumeného harmonického oscilátoru, jestliže za čas 10 s trvání pohybu hmotný bod ztratí 50 % své mechanické energie. Perioda tlumeného pohybu je T=2 s. [$0,0693$]

Příklad 31

Těleso visí na pružině a kmitá s periodou $T = 0{,}5$ s. O kolik se pružina zkrátí odstraněním tělesa? [$6,2$ cm]

Příklad 32

Kruhová deska koná ve svislém směru kmitavý harmonický pohyb s amplitudou $A = 0{,}75$ m. Jaká může být maximální frekvence kmitání desky, aby se předmět volně uložený na desku od ní neoddělil? [$0,575$ Hz]

Příklad 33

Pozorováním tlumeného harmonického kmitavého pohybu se zjistilo, že po dvou za sebou následujících výchylkách na stejnou stranu se amplituda kmitů zmenšila o 6/10 a že doba kmitu $T = 0{,}5$ s. Určete součinitel tlumení δ a logaritmický dekrement útlumu Λ. [$1,833\ \mathrm{s}^{-1}$] [$0,916$]

Příklad 34

Nalezněte amplitudu A a fázi ψ výsledného harmonického pohybu $u = A\sin(\omega t + \psi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce se stejnou periodou, $u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ amplitudami $A_1 = 3$ cm, $A_2 = 5$ cm a fázemi $\varphi_1 = 0^o$, $\varphi_2 = 60^o$ [7 cm]

$\left[38,2132^o = 38^o 12' 47'' \doteq 0,667 \text{ rad}\right]$

Příklad 35

Nalezněte amplitudu a fázi výsledného harmonického pohybu $u = A\cos(\omega t + \varphi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce $u_1 = A_1 \cos(\omega\ t + \varphi_1), u_2 = A_2 \cos(\omega\ t + \varphi_2)$ $A_1 = A_2 = 5$ cm, fáze $\varphi_1 = 30^o$, $\varphi_2 = 60^o$.

[$9,66$ cm]

$\left[45^o = \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right]$

Příklad 36

Na pružnou spirálu zavěsíme na spodním konci závaží hmotnosti značně větší než je hmotnost spirály. Při tom se spirála protáhne o 4 cm. S jakou frekvencí bude soustava kmitat, udělíme-li jí ve svislém směru impuls ? $[2,51\ \mathrm{Hz}]$

Příklad 37

Mobilní telefon spadne do kanálu, který ústí na druhé straně Země. Za jak dlouho se telefon vrátí? Poloměr Země $R_z = 6378$ km, hmotnost Země $M_z = 6.10^{24}$ kg. Hustotu Země budeme pokládat za konstantní. $\varkappa = 6,67.10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$ $[5059\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min} 19\ \mathrm{s}]$

Příklad 38

Určete dobu kmitu kapaliny, která je nalita do trubice tvaru U tak, že celková délka sloupce kapaliny je $l = 1$ m. $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ $[1,42\ \mathrm{s}]$

Příklad 39

Za jak dlouho se energie kmitavého pohybu ladičky s frekvencí $f = 435$ Hz zmenší $n = 10^6$ krát? Jaký je činitel jakosti ladičky? Logaritmický dekrement útlumu je roven $\Lambda = 8.10^{-4}$. $[19,84\ \mathrm{s}]$ $[3927]$

Příklad 40

Slunce vyzařuje přibližně jako absolutně černé těleso o teplotě T=5700 K. Budeme-li slunečním světlem ozařovat absolutně černou měděnou kouli umístěnou ve vzdálenosti 1 AU od Slunce, jaká se na ní ustaví rovnovážná teplota? Průměr Slunce je ze Země pozorován pod úhlem $\alpha = 30'$. $[266,2\ \mathrm{K}]$

Příklad 41

Sluneční světlo dopadá kolmo k povrchu Země někde v rovníkové Africe. Bude-li povrch vyzařovat jako absolutně černé těleso, jaká bude maximální teplota v této oblasti? $\left[1295,5\ \mathrm{W.m^{-2}}\right]$ Stanovte rovněž, jaký výkon přenáší sluneční záření na metr čtvereční zemského povrchu v těchto místech. $[388{,}8\ \mathrm{K} = 116,5^o\ \mathrm{C}]$

Předpokládejte, že Slunce vyzařuje jako absolutně černé těleso o teplotě 5700 K. Poloměr Slunce je roven 696 000 km, střední vzdálenost Země od Slunce je rovna $149{,}6.10^6$ km, Stefan-Boltzmanova konstanta je rovna $\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.

Příklad 42

Americký fyzik Richard Holly Compton studoval v roce 1922 rozptyl rentgenového záření na parafínu (Comptonův rozptyl). Vazebná energie elektronu v parafínu je mnohem menší než energie záření, Compton proto pokládal elektrony za volné. Překvapivé je, že rozptýlená vlnová délka fotonu je větší, než vlnová délka dopadajícího fotonu. Dochází k rozptylu fotonu na volném eletronu. Experiment prokazuje částicovou povahu světla. Nobelova cena udělena v roce 1927.

Svazek paprsků X se rozptyluje na volných elektronech. Pod úhlem 45^o od směru šíření svazku mají rozptýlené paprsky vlnovou délku $2{,}2.10^{-12}$ m. Jaká je vlnová délka dopadajících paprsků X?

Řešení:

Příklad budeme řešit pomocí zákonů zachování.

zákon zachování energie:

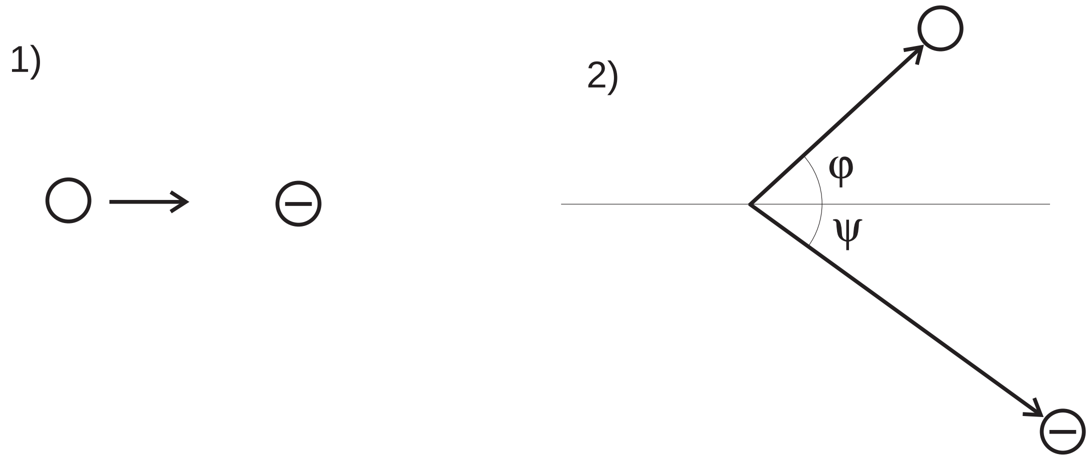
$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \tag{1}$$

zákon zachování hybnosti x-ová složka:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi + mv\cos\psi \tag{2}$$

y-ová složka

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\varphi + mv\sin\psi \tag{3}$$



Obrázek 6: Schematické znázornění rozptylu fotonu na volném elektronu.

dále požijeme vztah pro relativistickou transformaci hmotnosti

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Nejprve odstraníme proměnnou ψ sečtením druhých mocnin (2) a (3). Nejprve je třeba obě rovnice upravíme tak, aby na pravých starnách byly jen členy s ψ

$$\frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{2h^2\nu\nu'}{c^2}\cos\varphi + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} = m^2v^2 \tag{5}$$

člen m^2v^2 vyjádříme z (4) jako $m^2v^2 = m^2c^2 - m_0^2c^2$. Dosazením do (5) po vynásobení c^2 máme

$$h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\varphi + h^2\nu'^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4 \tag{6}$$

Umocněním rovnice (1) dostaneme (umocnujeme jako trojčlen na levé straně, na pravé jen mc^2)

$$h^2(\nu^2 - 2\nu\nu' + \nu'^2) + (2h\nu - 2h\nu')m_0c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4 \tag{7}$$

porovnáním pravých stran (6) a (7) dostaneme po malé úpravě

$$2h\nu\nu'(1 - \cos\varphi) - 2\nu m_0c^2 = -2\nu' m_0c^2 \tag{8}$$

vydělíme $\nu\nu'$ a po drobné úpravě máme pro vlnovou délku

$$\lambda = \lambda' - \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi) = \underline{\underline{1,49.10^{-12}\ \mathrm{m}}} \tag{9}$$

Příklad 43

Určete, jaký proud by měl procházet kovovým vláknem o průměru d =0,1 mm, které je umístěno ve vyčerpané baňce, aby se jeho teplota udržela na konstantní hodnotě T =1000 K. Předpokládejte, že vlákno vyzařuje jako absolutně černé těleso, tepelné ztráty spojené s vedením tepla zanedbejte. Rezistivita vodiče je ρ =0,025 $\mu\Omega$.m. Stefan-Boltzmanova konstanta je rovna σ = 5,67.10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}. $[2,37\ \mathrm{A}]$

Příklad 44

Určete výkon, vyzařovaný z jednoho metru čtverečního povrchu Slunce. Předpokládejte, že Slunce září jako absolutně černé těleso. Maximum intenzity slunečního záření připadá na vlnovou délku λ =510 nm, Stefan-Boltzmanova konstanta je rovna σ = 5,67.10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}, Wienova konstanta je $b = 2,898.10^{-3}$ m.K. $\left[59,1\ \mathrm{MW.m^{-2}}\right]$

Příklad 45

Určete vlnovou délku de Broghliovy vlny elektronu, který byl urychlen průchodem potenciálním rozdílem U=100 V. Hmotnost elektronu je $m_e = 9,101.10^{-31}$ kg, náboj elektronu je e = 1,602.10^{-19} C, Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s .

$[1,23.10^{-10}\ \mathrm{m}]$