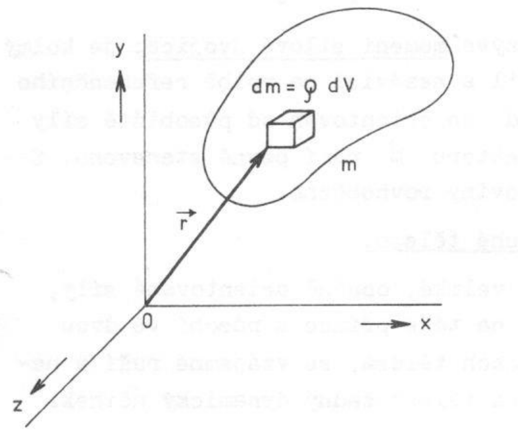
hmotnost střely je $m_1 = 10$ g, počáteční rychlost střely je $v_1 = 750$ m.s^{-1}.

$$\left[\quad v = \frac{m_1 v_1}{m} = 0{,}1 \text{ m.s}^{-1} \quad\right]$$

Ú l o h a 93 : Určete vzdálenost, o kterou se přemístí loďka délky $d = 2{,}5$ m a hmotnosti $m_1 = 100$ kg stojící na vodě, přejde-li člověk hmotnosti $m = 70$ kg ze zádi na příď lodi (odpor vody zanedbejte).

$$\left[\quad x = \frac{m}{m + m_1}\, d \doteq 1{,}03 \text{ m} \quad\right]$$

1.6. Dynamika tuhého tělesa



Představa tělesa složeného z malých elementů objemu dV. Hmotnost tohoto elementu je

$$dm = \rho\, dV\,,$$

kde $\rho = \rho(\vec{r})$ je hustota tělesa v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}$, ve kterém jsme zvolili tento element. $[\rho] = \text{kg.m}^{-3}$.

Celková hmotnost tělesa je dána součtem hmotností všech elementů

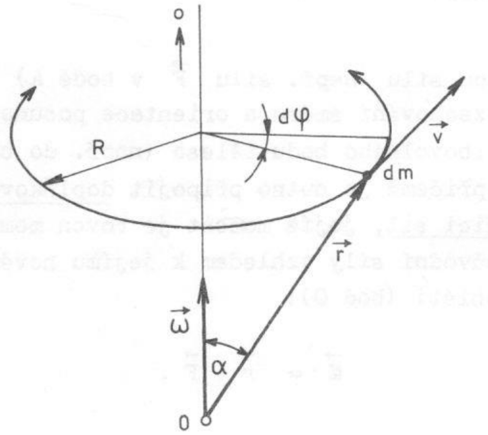
$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(\vec{r})\, dV\,.$$

Těleso, jehož tvar se nemění působením vnějších sil (tedy nedochází k jeho deformaci) se považuje za tuhé těleso.

Translace (posuvný pohyb) tuhého tělesa: libovolná přímka pevně spojená s tělesem zachovává v prostoru stále svůj směr; v každém okamžiku pohybu mají všechny body tělesa stejnou okamžitou rychlost.

Rotační pohyb tuhého tělesa:

a) Kolem pevné osy: body tělesa ležící na ose rotace zůstávají v klidu. Každý jiný bod tělesa se pohybuje po kružnici, která leží v rovině proložené uvažovaným bodem kolmo na osu rotace a jejíž střed leží na ose rotace.



Obvodová rychlost bodu tělesa závisí na jeho vzdálenosti od osy rotace. Úhlová rychlost je pro všechny body tělesa stejná a určuje úhlovou rychlost tělesa.

Vektor úhlové rychlosti leží v ose rotace. Vektor rychlosti $\vec{v}$ kteréhokoliv bodu rotujícího tělesa pro případ, že osa rotace prochází počátkem souřadnicového systému, je dán vztahem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,.$$

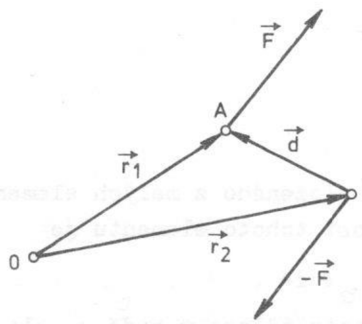
Vektor úhlového zrychlení tělesa

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

má při rotaci tělesa kolem pevné osy také směr osy rotace.

b) Kolem pevného bodu: v tomto případě je těleso upevněno v jednom bodě a každý jiný jeho bod se může pohybovat jen po kulové ploše se středem v pevném bodě. Při této rotaci osa rotace tělesa, která prochází tímto pevným bodem, nemá již stálou polohu, ale mění svůj směr - proto se hovoří o okamžité ose rotace.

Silová dvojice: Tvoří ji dvě rovnoběžné síly stejně veliké, opačně orientované, působící ve dvou různých bodech tělesa.



$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ - polohové vektory působiště sil vzhledem k libovolnému referenčnímu bodu O.

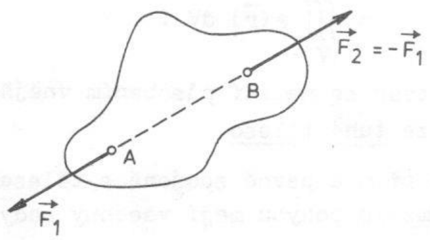
Výsledný moment sil je:

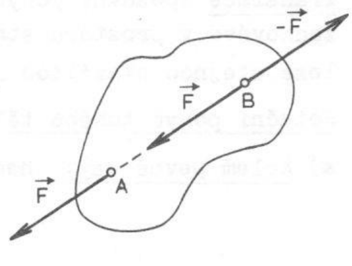
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} \,.$$

Vektor $\vec{M}$ se nazývá moment silové dvojice; je kolmý na rovinu obou sil a nezávisí na volbě referenčního bodu O. Vektor $\vec{d}$ je orientován od působiště síly $-\vec{F}$. Působiště vektoru $\vec{M}$ není pevně stanoveno. Silovou dvojici lze přenášet v její rovině i do roviny rovnoběžné.

Některé důležité vlastnosti sil působících na tuhé těleso:

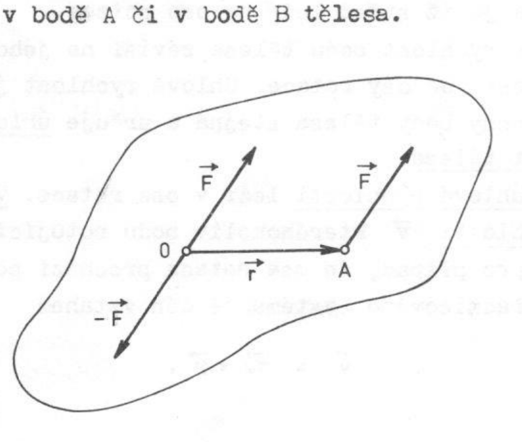
a) Dvě stejně veliké, opačně orientované síly, které leží na téže přímce a působí ve dvou různých bodech tělesa, se vzájemně ruší a nemají tedy na těleso žádný dynamický účinek.





b) Působiště každé síly působící na tuhé těleso lze posunout po její vektorové přímce do libovolného bodu, přičemž její dynamický účinek na těleso je zachován. Z obrázku a závěru v bodě a) plyne shodnost dynamického účinku síly $\vec{F}$, působí-li v bodě A či v bodě B tělesa.

c) Každou sílu (např. sílu $\vec{F}$ v bodě A) lze při zachování směru a orientace posunout do libovolného bodu tělesa (např. do bodu O), přičemž je nutno připojit doplňkovou dvojici sil, jejíž moment je roven momentu původní síly vzhledem k jejímu novému působišti (bod O):



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \,.$$

Podmínky rovnováhy tuhého tělesa:

Bude-li na tuhé těleso působit soustava sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ v různých působištích o polohových vektorech $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ vzhledem k libovolnému bodu O tělesa, lze každou z těchto sil $\vec{F}_1$ přenést do bodu O a připojit k ní doplňkovou silovou dvojici momentu

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \, .$$

Síly přenesené do bodu O lze vektorově sečíst ve výslednici

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, .$$

Zvolíme-li střed hmotnosti tuhého tělesa za tento bod O, výslednice sil $\vec{R}$ vyvolá posuvný pohyb tělesa.

Taktéž momenty $\vec{M}_i$ doplňkových dvojic sil lze přenést do libovolného bodu tělesa a vektorově sečíst ve výsledný moment

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \, ,$$

který způsobí rotační pohyb tuhého tělesa.

Má-li být tuhé těleso v rovnováze, musí být jak výslednice sil $\vec{R}$, tak i výsledný moment $\vec{M}$ rovny nule. (Přitom podmínka rovnováhy momentů je nezávislá na volbě bodu O, vzhledem ke kterému určujeme polohové vektory $\vec{r}_i$ působišť sil.)

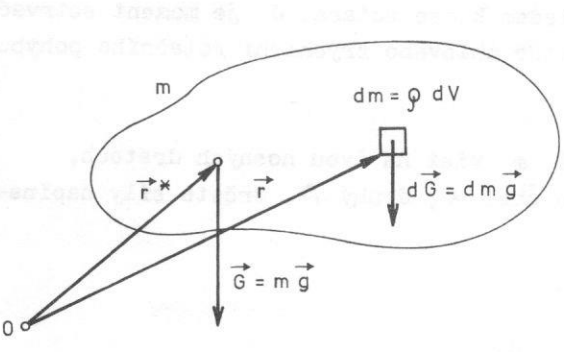
Těžiště tuhého tělesa: na každý element tělesa o hmotnosti dm působí v homogenním tíhovém poli elementární tíhová síla

$$d\vec{G} = dm\, \vec{g} \, .$$

Výslednice těchto rovnoběžných sil působících v tělese je rovna

$$\vec{G} = \int_{(m)} d\vec{G} = \vec{g} \int_{(m)} dm = m\, \vec{g} \, .$$

Působiště této výslednice se nazývá těžiště tělesa. Jeho polohu lze určit z podmínky, aby moment výslednice $\vec{G}$ vzhledem k libovolnému bodu byl roven součtu momentů všech elementárních sil $d\vec{G}$ vzhledem k témuž bodu:



$$\vec{r}^* \times \vec{G} = \int_{(m)} (\vec{r} \times dm\, \vec{g}) \Rightarrow$$

$$m\, \vec{r}^* \times \vec{g} = \int_{(m)} \vec{r}\, dm \times \vec{g} \, ;$$

odtud pro polohu těžiště tělesa:

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r}\, dm \, ,$$

nebo

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \rho\, \vec{r}\, dV \, .$$

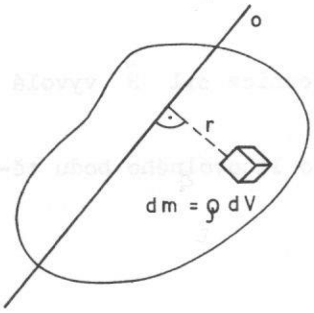
Pro případ homogenního tělesa je ρ = konst. v celém objemu tělesa a těžiště takového tělesa je dáno

$$\vec{r}^{\,*} = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \vec{r}\, dV \,.$$

Je zřejmé, že poloha těžiště tělesa je totožná s jeho středem hmotnosti.

Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy:

Při rotaci tělesa hmotnosti m a objemu V kolem zvolené pevné osy O koná každý jeho element dm pohyb po kruhové dráze poloměru r, který je roven jeho vzdálenosti od osy rotace. Úhlová rychlost všech elementů je stejná, jejich obvodová rychlost závisí na poloměru r.



Kinetická energie tohoto elementu je

$$dW_k = \frac{1}{2}\, dm\, v^2 = \frac{1}{2}\, dm\, r^2 \omega^2 \,.$$

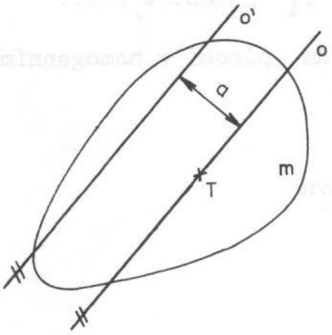
Celková kinetická energie rotačního pohybu tělesa je

$$W_k = \int_{(m)} dW_k = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{2}\,\omega^2 \iiint_{(V)} r^2 \varrho\, dV = \frac{1}{2}\,\omega^2 J \,,$$

kde $J = \iiint_{(V)} r^2 \varrho\, dV$ se nazývá moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace O. $[J] = m^2 kg$.

Steinerova věta:

$$J' = J_T + ma^2 \,,$$



kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose O procházející těžištěm,

J' je moment setrvačnosti vzhledem k ose O´, rovnoběžné s osou O ve vzdálenosti a,

m je celková hmotnost tělesa.

Pro všechny rovnoběžné osy je nejmenší moment setrvačnosti k ose, která prochází těžištěm tělesa.

Pohybová rovnice rotačního pohybu tuhého tělesa:

$$\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon} \,,$$

kde $\vec{M}$ je výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose rotace, J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace, $\vec{\varepsilon}$ je vektor úhlového zrychlení rotačního pohybu.

Ú l o h a 94 : Pouliční svítilna hmotnosti m visí na dvou nosných drátech, z nichž první svírá s horizontální rovinou úhel α, druhý β. Určete síly napínající nosné dráty.

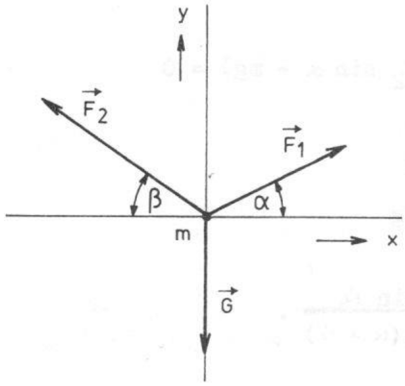
Řešení:

$$\vec{G} = -mg\,\vec{j} \,,$$
$$\vec{F}_1 = F_1(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) \,,$$
$$\vec{F}_2 = F_2(-\vec{i}\cos\beta + \vec{j}\sin\beta) \,.$$

Podmínka rovnováhy:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0 \,;$$

tedy



$$F_1(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + F_2(-\vec{i}\cos\beta + \vec{j}\sin\beta) - mg\,\vec{j} = 0$$

nebo

$$\vec{i}(F_1\cos\alpha - F_2\cos\beta) + \vec{j}(F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta - mg) = 0.$$

Pro hledané síly dostáváme dvě rovnice:

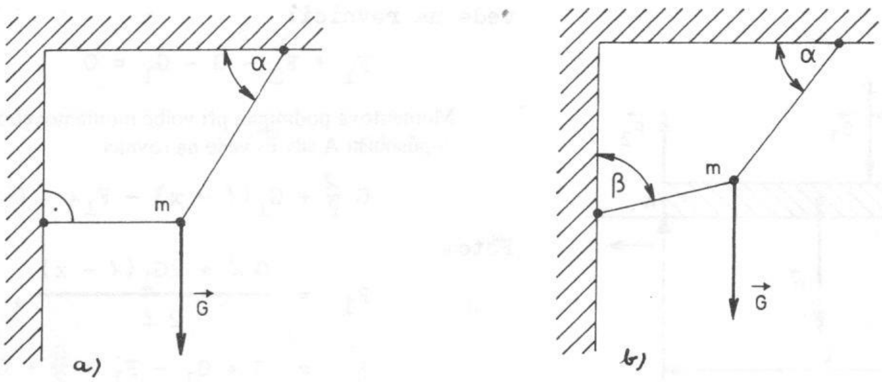
$$F_1\cos\alpha - F_2\cos\beta = 0$$

$$F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta = mg$$

Odtud:

$$F_1 = mg\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ ; \qquad F_2 = mg\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\ .$$

Ú l o h a 95 : Závaží hmotnosti m je zavěšeno na nehmotných závěsech. Vypočtěte jakými silami jsou napínána lana pro následující uspořádání:

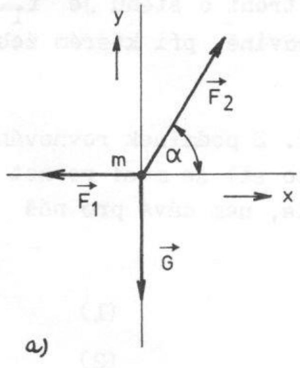


Řešení:

a) $\vec{G} = -\vec{j}\,mg$

$\vec{F}_1 = -\vec{i}\,F_1$

$\vec{F}_2 = \vec{i}\,F_2\cos\alpha + \vec{j}\,F_2\sin\alpha$



Podmínka rovnováhy: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$;

tedy

$$\vec{i}(-F_1 + F_2\cos\alpha) + \vec{j}(F_2\sin\alpha - mg) = 0\ .$$

Dostáváme dvě rovnice pro síly F_1 , F_2 :

$$-F_1 + F_2\cos\alpha = 0$$

$$F_2\sin\alpha - mg = 0$$

Odtud:

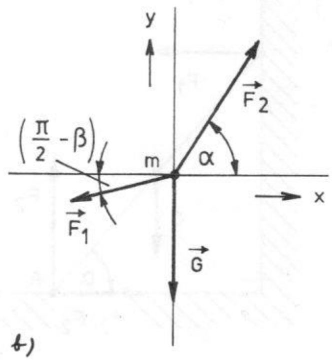
$$F_1 = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha}\ ; \qquad F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

b) $\vec{G} = -\vec{j}\,mg$

$\vec{F}_1 = -\vec{i}\,F_1\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) - \vec{j}\,F_1\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$

$\vec{F}_2 = \vec{i}\,F_2\cos\alpha + \vec{j}\,F_2\sin\alpha$

Podmínka rovnováhy: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$;



tedy:

$$\vec{i}\,(-F_1 \sin\beta + F_2 \cos\alpha) + \vec{j}\,(-F_1 \cos\beta + F_2 \sin\alpha - mg) = 0$$

Dostáváme dvě rovnice pro síly F_1, F_2:

$$-F_1 \sin\beta + F_2 \cos\alpha = 0$$

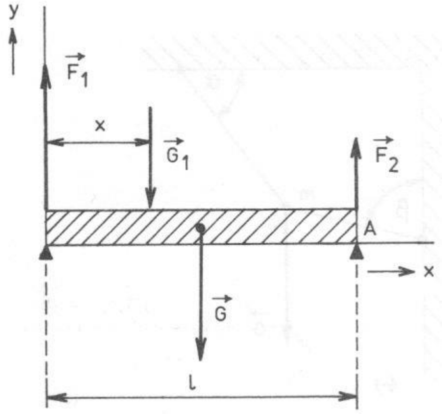
$$-F_1 \cos\beta + F_2 \sin\alpha = mg$$

Odtud:

$$F_1 = -mg\,\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\,; \qquad F_2 = -mg\,\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\,.$$

Úloha 96: Homogenní nosník hmotnosti m a délky l spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti x od jednoho konce je zatížen hmotností m_1. Sestavte podmínky rovnováhy nosníku a určete reakce v podpěrách.

Řešení:



Podmínka sil

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{G}_1 = 0$$

vede na rovnici:

$$F_1 + F_2 - G - G_1 = 0$$

Momentová podmínka při volbě momentového bodu v působišti A síly $\vec{F}_2$ vede na rovnici:

$$G\,\frac{\ell}{2} + G_1(\ell - x) - F_1\ell = 0\,.$$

Potom

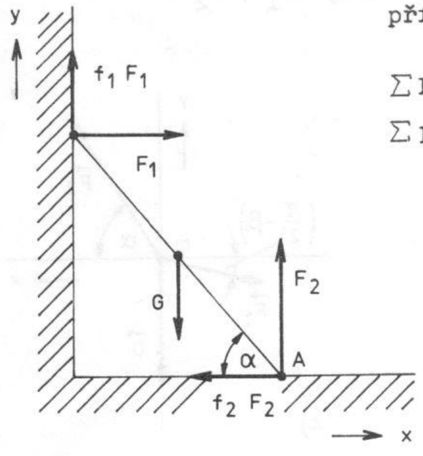
$$F_1 = \frac{G\ell + 2G_1(\ell - x)}{2\ell}\,,$$

$$F_2 = G + G_1 - F_1 = \frac{G}{2} + G_1\,\frac{x}{\ell}\,,$$

kde $G = mg$; $G_1 = m_1 g$.

Úloha 97: U stěny je postaven žebřík. Jeho koeficient tření o stěnu je f_1, o zem f_2. Určete minimální úhel vzhledem k horizontální rovině, při kterém žebřík nespadne působením vlastní váhy.

Řešení: V bodech dotyku působí na žebřík reakce a síly tření. Z podmínek rovnováhy plyne, že výslednice působících sil a výsledný moment těchto sil se musí rovnat nule. Podmínka, že výslednice působících sil je rovna nule, nám dává pro náš případ dvě rovnice:



$$\sum F_x = F_1 - f_2F_2 = 0\,, \qquad (1)$$

$$\sum F_y = F_2 + f_1F_1 - G = 0\,. \qquad (2)$$

Momentová podmínka při volbě bodu A za momentový bod dává rovnici

$$G\,\frac{\ell}{2}\cos\alpha - f_1F_1\,\ell\cos\alpha - F_1\,\ell\sin\alpha = 0\,. \qquad (3)$$

Ze vztahu (1): $F_2 = \dfrac{F_1}{f_2}$;

pak ze (2): $G = F_1\left(f_1 + \dfrac{1}{f_2}\right)$.

Po dosazení do (3) dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left(f_1 + \frac{1}{f_2}\right)\cos\alpha - f_1 \cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

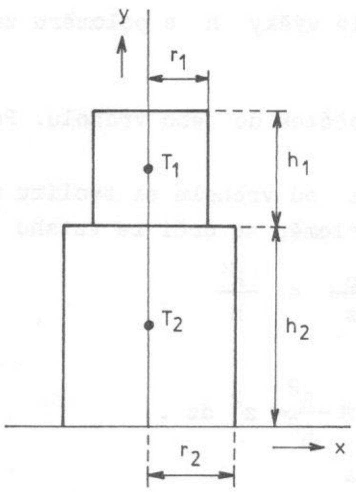
a odtud

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - f_1 f_2}{2f_2} .$$

Úhel závisí jen na koeficientech tření.

Ú l o h a 98 : Určete polohu těžiště homogenního tělesa vytvořeného ze dvou souosých válců $r_1, h_1; r_2, h_2$.

Řešení: Každý z válců má těžiště na ose y v polovině své výšky; v nich si můžeme myslet soustředěny jejich hmotnosti:



$$m_1 = \pi r_1^2 h_1 \varrho ,$$
$$m_2 = \pi r_2^2 h_2 \varrho .$$

Máme tedy soustavu dvou hmotných bodů m_1, m_2 o souřadnicích

$$x_1 = 0, \quad y_1 = h_2 + \frac{h_1}{2} ,$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{h_2}{2} .$$

Poloha těžiště této soustavy je dána:

$$x_0 = 0 ,$$

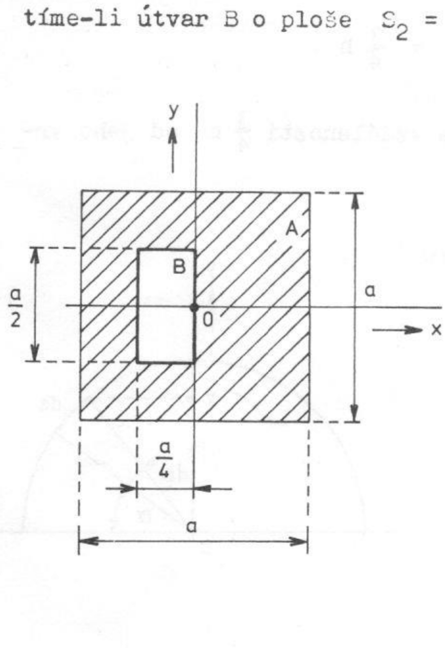
$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{r_1^2 h_1 \left(h_2 + \frac{h_1}{2}\right) + r_2^2 h_2 \frac{h_2}{2}}{r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2} =$$

$$= \frac{r_1^2 h_1 (2h_2 + h_1) + r_2^2 h_2^2}{2(r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2)} .$$

Ú l o h a 99 : Vypočtěte polohu těžiště útvaru znázorněného na obrázku.

Řešení: Hledanou polohu těžiště útvaru A o ploše $S_1 = a^2 - \frac{a^2}{8}$ označme x_1. Vrátíme-li útvar B o ploše $S_2 = \frac{a^2}{8}$ zpět, je poloha jeho těžiště

$$x_2 = -\frac{a}{8} .$$



Poloha těžiště výsledného útvaru A + B je $x_0 = 0$, kterou vyjádříme vztahem

$$x_0 = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} =$$

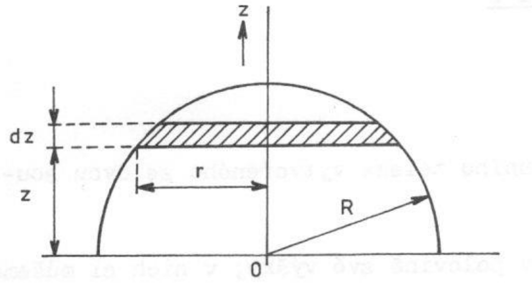
$$= \frac{\left(a^2 - \frac{a^2}{8}\right)x_1 - \frac{a}{8}\,\frac{a^2}{8}}{a^2} = 0.$$

Odtud

$$x_1 = \frac{a}{56} .$$

Ú l o h a 100 : Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru R .

Řešení: Z důvodů symetrie bude těžiště ležet na ose z . Ve vzdálenosti z zvolíme válec výšky dz a poloměru $r = \sqrt{R^2 - z^2}$. Jeho objem se rovná



$$dV = \pi r^2 \, dz = \pi (R^2 - z^2) \, dz .$$

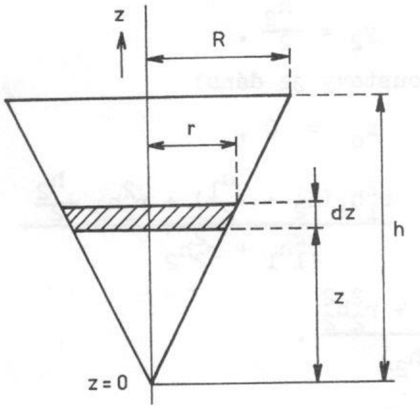
Poloha těžiště polokoule je potom rovna

$$z_o = \frac{1}{V} \int_{(V)} z \, dV = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \int_{z=0}^{R} \pi (R^2 - z^2) z \, dz =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3}{8} R .$$

Ú l o h a 101 : Určete polohu těžiště homogenního kužele výšky h a poloměru základny R .

Řešení: Osu z položíme do osy symetrie kužele, její počátek do jeho vrcholu. Potom těžiště leží na ose z .



Ve vzdálenosti z od vrcholu si zvolíme válec výšky dz, jehož poloměr se určí ze vztahu

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{h}$$

a jeho objem se rovná

$$dV = \pi r^2 \, dz = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \, dz .$$

Poloha těžiště je dána:

$$z_o = \frac{1}{V} \int_{(V)} z \, dV ,$$

kde V je objem kužele:

$$V = \int_{z=0}^{h} dV = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_{z=0}^{h} z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h .$$

Tedy

$$z_o = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_{z=0}^{h} \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 \, dz = \frac{3}{4} h .$$

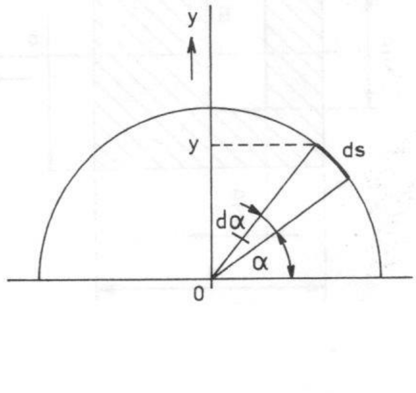
Těžiště kužele tedy leží na jeho ose symetrie ve vzdálenosti $\frac{3}{4}$ h od jeho vrcholu nebo $\frac{1}{4}$ h od jeho základny.

Ú l o h a 102 : Určete polohu těžiště tenkého drátu ohnutého do půlkruhu poloměru R.

Řešení: Z důvodů symetrie těžiště leží na ose y. Pro délkový element útvaru lze psát

$$ds = R \, d\alpha .$$

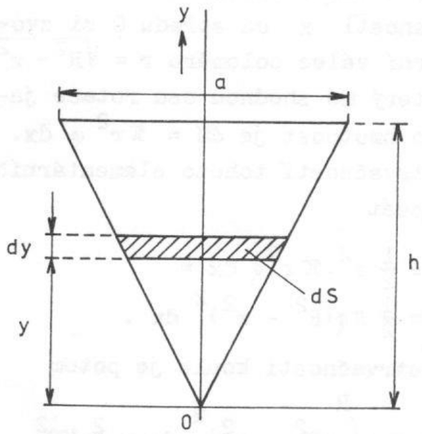
Jeho celková délka $\ell = \pi R$. Potom:



$$y_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{(\ell)} y \, ds = \frac{1}{\pi R} \int\limits_{\alpha=0}^{\pi} R \sin\alpha \, R \, d\alpha = \frac{2R}{\pi} .$$

Ú l o h a 103 : Určete polohu těžiště rovnoramenného trojúhelníka o základně a a výšce h.

Řešení: Těžiště leží na ose y. Ve vzdálenosti y od vrcholu trojúhelníka zvolíme plošku



$$dS = \frac{a}{h} y \, dy .$$

Potom:

$$y_0 = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} y \, dS = \frac{1}{\frac{1}{2} ah} \int\limits_{y=0}^{h} y \frac{a}{h} y \, dy = \frac{2}{3} h .$$

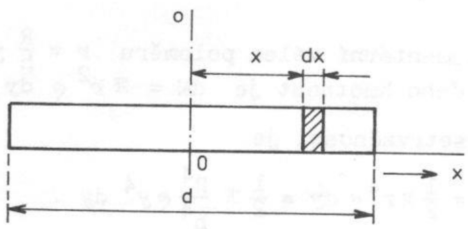
Těžiště leží ve vzdálenosti $\frac{2}{3} h$ od vrcholu trojúhelníka.

Ú l o h a 104 : Určete moment setrvačnosti homogenní tyče délky d a hmotnosti m vzhledem k ose

a) která prochází středem tyče kolmo na její směr,

b) na konci tyče kolmé na její směr.

Řešení:



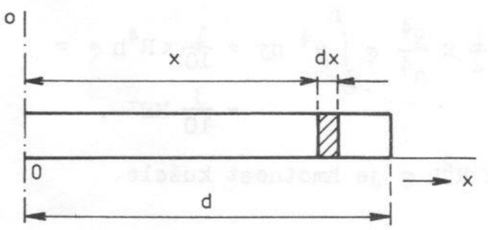
a) Element tyče délky dx ve vzdálenosti x od osy má moment setrvačnosti

$$dJ = x^2 \, dm = x^2 \varrho \, S \, dx .$$

Moment setrvačnosti tyče bude

$$J = \int\limits_{x=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dJ = \varrho S \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 \, dx = \frac{1}{12} md^2 ,$$

kde $m = S \, d \varrho$ je hmotnost tyče.



b) Tento případ se od předchozího liší jen v integračních mezích:

$$J = \int\limits_{x=0}^{d} dJ = \varrho S \int\limits_{0}^{d} x^2 \, dx = \frac{1}{3} md^2 .$$

Ú l o h a 105 : Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního rotačního válce poloměru R, hmotnosti M vzhledem k ose jeho symetrie.

Řešení: Nejsnáze lze provést v polárních souřadnicích, ve kterých element objemu je vyjádřen

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dh .$$

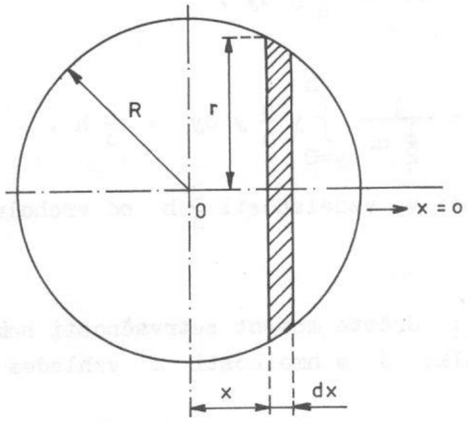
Potom:

$$J = \int\limits_{(M)} r^2\, dm = \int\limits_{(V)} r^2 \varrho\, dV = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{h=0}^{h} \varrho r^3\, dr\, d\varphi\, dh = \frac{1}{2} MR^2 ,$$

kde $M = \pi R^2 h \varrho$ je hmotnost válce.

Ú l o h a 106 : Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule poloměru R o hmotnosti M vzhledem k ose procházející jejím středem.

Řešení: K výpočtu lze využít výsledku pro moment setrvačnosti válce.



Ve vzdálenosti x od středu 0 si zvolíme elementární válec poloměru $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ a výšky dx, který má shodnou osu rotace jako koule. Jeho hmotnost je $dM = \pi r^2 \varrho\, dx$. Pro moment setrvačnosti tohoto elementárního válce můžeme psát

$$dJ = \frac{1}{2} r^2\, dM = \frac{1}{2} r^2 . \pi r^2 \varrho\, dx = \\ = \frac{1}{2} \pi \varrho (R^2 - x^2)^2\, dx .$$

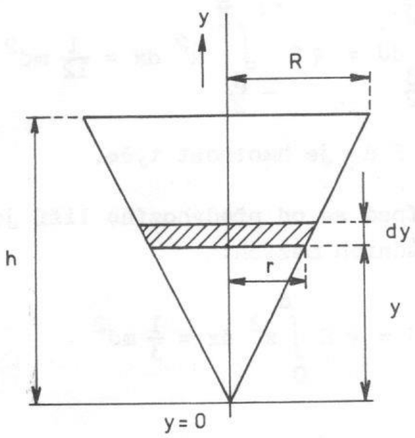
Moment setrvačnosti koule je potom

$$J = \int\limits_{x=-R}^{R} dJ = \frac{1}{2} \pi \varrho \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{2}{5} MR^2 ,$$

kde $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho$ je hmotnost koule.

Ú l o h a 107 : Určete moment setrvačnosti homogenního kužele poloměru základny R a hmotnosti M vzhledem k ose jeho symetrie.

Řešení: Ve vzdálenosti y od vrcholu zvolíme elementární válec poloměru $r = \frac{R}{h} y$ a tloušťky dy, který má shodnou osu symetrie. Jeho hmotnost je $dM = \pi r^2 \varrho\, dy$.



Jeho moment setrvačnosti je

$$dJ = \frac{1}{2} r^2 dM = \frac{1}{2} \pi r^4 \varrho\, dy = \frac{1}{2} \pi \frac{R^4}{h^4} \varrho y^4\, dy .$$

Moment setrvačnosti kužele je potom

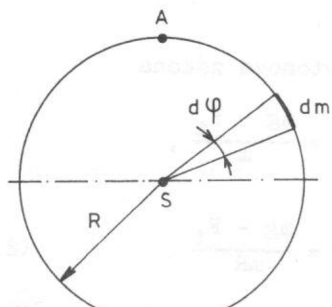
$$J = \int\limits_{y=0}^{h} dJ = \frac{1}{2} \pi \frac{R^4}{h^4} \varrho \int\limits_{0}^{h} y^4\, dy = \frac{1}{10} \pi R^4 h \varrho = \\ = \frac{3}{10} MR^2 ,$$

kde $M = \frac{1}{3} \pi R^2 h \varrho$ je hmotnost kužele.

Ú l o h a 108 : Určete moment setrvačnosti homogenního tenkého drátu hmotnosti m , upraveného do tvaru kružnice poloměru R :

a) vzhledem k ose procházející středem kružnice kolmo k její rovině,
b) vzhledem k ose, která je s předcházející osou rovnoběžná a prochází bodem A na obvodu kružnice,
c) vzhledem k ose procházející středem kružnice a ležící v její rovině,
d) vzhledem k ose, která je tečnou kružnice.

Řešení:



a) $J_T = \int\limits_{(m)} R^2\, dm = \int\limits_{(V)} R^2 \rho\, dV = \rho R^2 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} S\, R\, d\varphi =$

$= 2\pi R^3 \rho S = mR^2$,

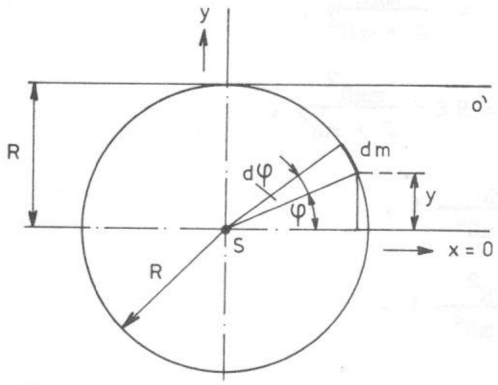
kde $m = 2\pi R \rho S$ je hmotnost drátu.

b) S použitím Steinerovy věty

$$J_A = J_T + mR^2 = 2mR^2 \ .$$

c) $J_x = \int\limits_{(m)} y^2\, dm = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin^2\varphi\, \rho S R\, d\varphi =$

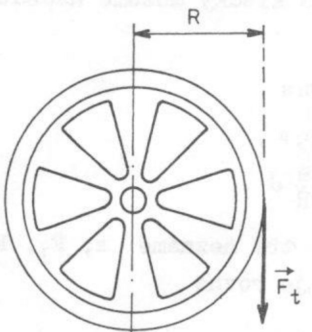
$= \rho S R^3 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi \rho S R^3 = \frac{1}{2}\, mR^2 .$



d) S použitím Steinerovy věty

$$J_{o'} = J_x + mR^2 = \frac{3}{2}\, mR^2 \ .$$

Ú l o h a 109 : Na kolo poloměru R začne v čase t = 0 působit konstantní tečná síla F_t (viz obrázek). V čase t_o dosáhne úhlové rychlosti ω_o. Určete jeho moment setrvačnosti, je-li moment síly tření roven M_t.



Řešení: Pohyb kola je rotační pohyb s konstantním úhlovým zrychlením. Výsledný moment, který tento pohyb způsobí, je

$$M = F_t R - M_t \ .$$

Úhlové zrychlení pohybu je

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_o}{t_o} \ .$$

Potom moment setrvačnosti kola je roven

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{F_t R - M_t}{\omega_o}\, t_o \ .$$

Ú l o h a 110 : Pro kladku poloměru R, momentu setrvačnosti J a zavěšené těleso hmotnosti m (viz obrázek) určete:

a) sílu F_t, která působí v laně,

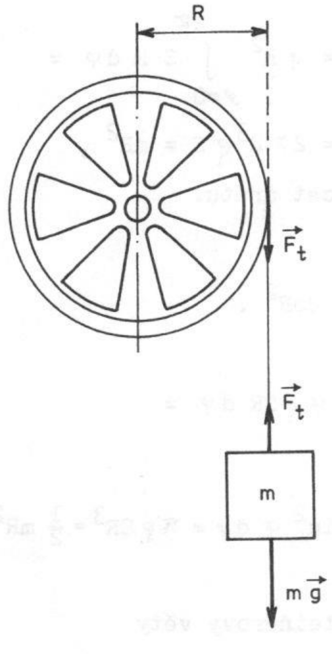
b) úhlové zrychlení kladky,

c) zrychlení pohybu tělesa,

d) úhlovou rychlost kladky a rychlost pohybu tělesa v čase t .

Řešení: Moment, který způsobí rotační pohyb kladky, je roven

$$M = F_t R = \varepsilon J \Rightarrow \varepsilon = \frac{F_t R}{J} \ . \qquad (1)$$



Výsledná síla působící pohyb tělesa je

$$mg - F_t \ .$$

Jeho zrychlení je podle 2. Newtonova zákona

$$ma = mg - F_t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg - F_t}{m} \ ,$$

nebo

$$R\varepsilon = \frac{mg - F_t}{m} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{mg - F_t}{mR} \ . \qquad (2)$$

Z rovností (1), (2) dostáváme:

$$F_t = \frac{Jmg}{J + mR^2} \ ,$$

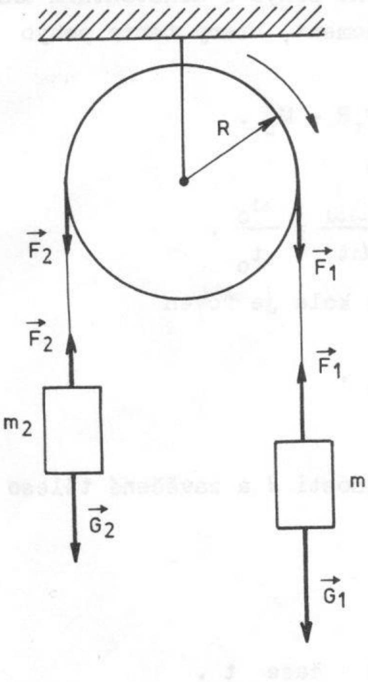
$$\varepsilon = \frac{mgR}{J + mR^2} \ ,$$

$$a = R\varepsilon = \frac{mgR^2}{J + mR^2} \ ,$$

$$\omega(t) = \varepsilon t = \frac{mgR}{J + mR^2}\, t \ ,$$

$$v(t) = at = \frac{mgR^2}{J + mR^2}\, t \ .$$

Ú l o h a 111 : Vypočítejte zrychlení dvou těles m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) zavěšených na kladce poloměru R a momentu setrvačnosti J .



Řešení: Pro pohyb těles a kladky můžeme napsat následující rovnice:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a \ ,$$

$$F_2 - m_2 g = m_2 a \ ,$$

$$(F_1 - F_2)R = \frac{a}{R} J \ .$$

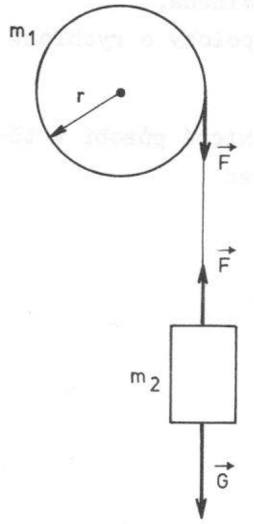
To jsou tři rovnice pro tři neznámé a, F_1, F_2. Zrychlení pohybu těles je rovno

$$a = g\, \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{R^2}} \ .$$

Ú l o h a 112 : Homogenní válec hmotnosti m_1, poloměru r se otáčí bez tření kolem vodorovné osy. Pohyb je způsoben tíhou tělesa m_2 zavěšeného na vlákně, které je navinuto na válci. Určete závislost úhlu otáčení válce na čase a zrychlení pohybu tělesa m_2 .

Řešení: Pro rotační pohyb válce platí rovnice

$$F\, r = J\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} \ . \qquad (1)$$



Pro pohyb tělesa m_2 platí rovnice

$$G - F = m_2 a \ , \quad \text{tj.} \quad m_2 g - F = m_2 a \ . \qquad (2)$$

Máme dvě rovnice pro neznámé a a F. Dosazením za F ze vztahu (2) do (1) dostaneme:

$$m_2(g - a)r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \ ,$$

kde $J = \frac{1}{2} m_1 r^2$ je moment setrvačnosti válce.

Položíme-li $a = r \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, pak poslední rovnice má tvar

$$m_2\left(g - r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \ .$$

Odtud:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2m_2 g}{(m_1 + 2m_2)r} \ .$$

Integrací pak dostáváme

$$\varphi(t) = \frac{m_2 g}{(m_1 + 2m_2)r} t^2 \ ,$$

když pro $t = 0$ je $\omega = 0$ a $\varphi = 0$.

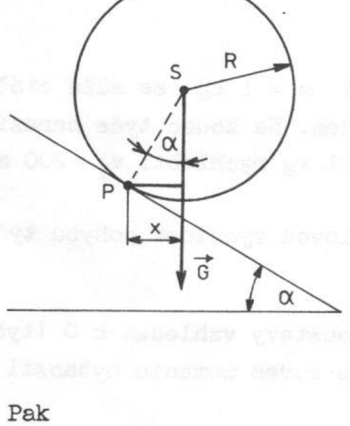
Těleso m_2 koná pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením

$$a = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g \ .$$

<u>Úloha 113</u>: Určete zrychlení pohybu středu homogenní koule hmotnosti m a poloměru R, která se valí (bez klouzání) po nakloněné rovině.

<u>Řešení:</u> Pohyb si lze představit jako rotaci koule kolem okamžité osy jdoucí bodem dotyku P. Pro tento pohyb můžeme psát rovnici

$$M = J\frac{d\omega}{dt} \ ,$$



kde $M = mgx = mg\,R \sin\alpha$,

J je moment setrvačnosti koule vzhledem k této okamžité ose rotace, který podle Steinerovy věty je

$$J = J_T + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2 \ .$$

Tedy platí:

$$mg\,R \sin\alpha = \frac{7}{5} mR^2 \frac{d\omega}{dt} \ ,$$

odtud

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{7}\frac{g}{R} \sin\alpha \ .$$

Pak

$$a = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{5}{7} g \sin\alpha \ .$$

<u>Úloha 114</u>: Homogenní tyč hmotnosti m a délky d, která se může volně otáčet kolem kloubu K, se nachází v horizontální poloze. Určete:

a) úhlové zrychlení tyče v okamžiku, kdy je z této polohy uvolněna,

b) úhlovou rychlost tyče v okamžiku, kdy dosáhne vertikální polohy a rychlost jejího volného konce v tomto okamžiku.

Řešení: a) Otáčivý pohyb tyče kolem kloubu vyvolá moment tíhy $\vec{G}$, která působí v těžišti tyče T. Velikost momentu tíhy v okamžiku uvolnění je roven

$$M = mg\frac{d}{2} .$$

V okamžiku uvolnění tedy platí:

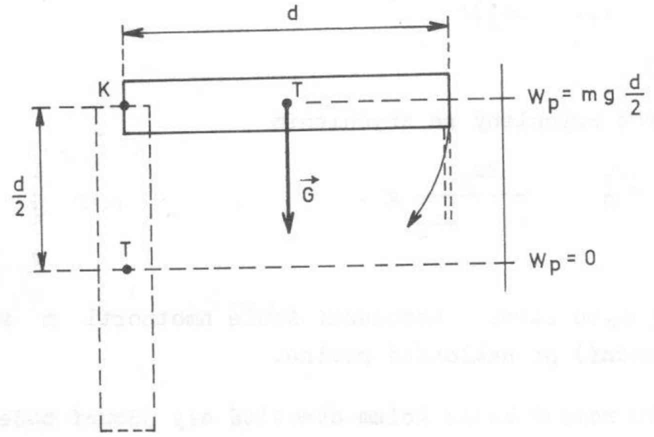
$$mg\frac{d}{2} = \varepsilon J ,$$

kde $J = \frac{1}{3}md^2$ je moment setrvačnosti tyče; tedy

$$mg\frac{d}{2} = \frac{1}{3}md^2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{d}$$

je počáteční úhlové zrychlení.

Protože při pohybu tyče její těžiště se pohybuje po kruhovém oblouku, rameno tíhové síly se mění a tím se mění i její moment a tedy úhlové zrychlení pohybu není konstantní!



b) Potenciální energie tyče v horizontální poloze je $W_p = mg\frac{d}{2}$, její kinetická energie je nulová.

Při průchodu vertikální polohou je potenciální energie nulová a její kinetická energie $W_k = \frac{1}{2}J\omega^2$. Proto musí platit

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{d}{2}$$

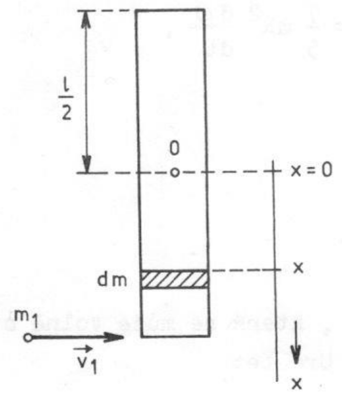
nebo

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}md^2\omega^2 = mg\frac{d}{2}$$

a tedy $\omega = \sqrt{\frac{3g}{d}}$ je úhlová rychlost pohybu v okamžiku průchodu tyče vertikální polohou. Rychlost pohybu jejího volného konce v tomto okamžiku je

$$v = \omega d = \sqrt{3gd} .$$

Úloha 115 : Dřevěná tyč délky $\ell = 0{,}4$ m a hmotnosti $m = 1$ kg se může otáčet kolem osy, která je na tyč kolmá a prochází jejím středem. Na konec tyče narazí střela hmotnosti $m_1 = 0{,}01$ kg rychlostí $v_1 = 200\ \mathrm{m.s^{-1}}$ kolmo na tyč i osu.



Určete počáteční úhlovou rychlost pohybu tyče, když v ní střela uvízne.

Řešení: Moment hybnosti soustavy vzhledem k 0 (tyč + + střela) před zásahem je roven momentu hybnosti střely vzhledem k 0 :

$$b_1 = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} .$$

Moment hybnosti tyče, která se otáčí úhlovou rychlostí ω okolo osy 0 , je

$$b_2 = \int_{(m)} x\, v\, dm = \int_{(m)} x . x\, \omega\, dm = \omega \int_{(m)} x^2\, dm = \omega J ,$$

kde J je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose O.

Zákon zachování momentu hybnosti izolované soustavy nám dává rovnici:

$$m_1 v_1 \frac{\ell}{2} = \omega J + m_1 v \frac{\ell}{2} ,$$

kde v je rychlost, se kterou se soustava tyč + střela začne pohybovat po uvíznutí střely v tyči.

Dosazení $v = \frac{\ell}{2}\omega$ a $J = \frac{1}{12} m \ell^2$ nám dává rovnici

$$m_1 v_1 \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} m \ell^2 \omega + m_1 \omega \frac{\ell^2}{4}$$

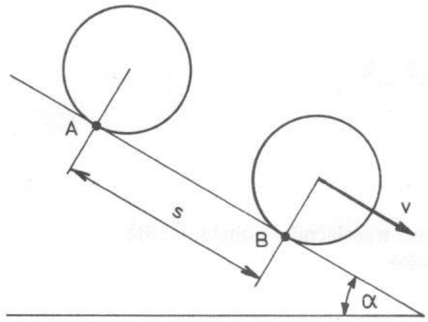
a tedy

$$\omega = \frac{6 m_1 v_1}{m\ell + 3 m_1 \ell} .$$

Ú l o h a 116 : Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní kotouč. Určete jeho rychlost v bodě B a čas potřebný k proběhnutí dráhy $s = \overline{AB}$.

Řešení: Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 .$$



Dosadíme-li $J = \frac{1}{2} mr^2$ a $\omega = \frac{v}{r}$, dostáváme pro rychlost v bodě B

$$v = 2 \sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}} .$$

Čas, potřebný k proběhnutí dráhy s, stanovíme ze vztahu pro rychlost

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{g \sin\alpha}}\, \frac{ds}{\sqrt{s}} .$$

Integrací dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{3s}{g \sin \alpha}} ,$$

za předpokladu, že pro $t = 0$ je $v = 0$.

Ú l o h a 117 : Homogenní tyč $\overline{AB} = \ell$ se opírá koncovými body o dokonale hladké, vzájemně kolmé stěny. Určete rychlost, s jakou dopadne horní konec A tyče na vodorovnou rovinu, jestliže pohyb tyče začal z její verikální polohy.

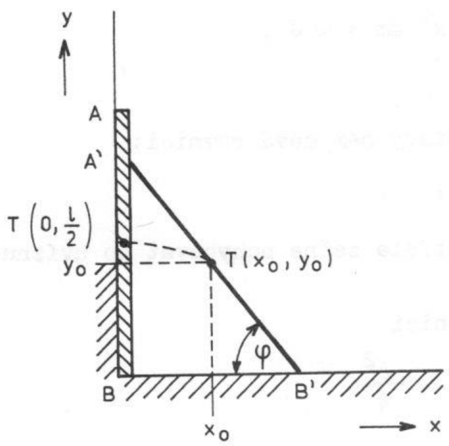
Řešení: Ve svislé poloze, tj. pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je potenciální energie tyče $W_p = mg \frac{\ell}{2}$ a kinetická energie $W_k = 0$.

Pohyb tyče se skládá z translačního pohybu těžiště a rotačního pohybu kolem osy jdoucí těžištěm.

V libovolném okamžiku pohybu, kdy $\varphi \neq 0$, je její potenciální energie rovna

$$W_p = mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi$$

a kinetická energie tyče je dána součtem kinetické energie translačního pohybu



těžiště a rotačního pohybu tyče kolem osy jdoucí těžištěm:

$$W_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 ,$$

kde v_o je rychlost translačního pohybu těžiště, ω je úhlová rychlost rotačního pohybu tyče kolem osy jdoucí těžištěm a $J = \frac{1}{12} m \ell^2$ je její moment setrvačnosti vzhledem k téže ose.

Poloha těžiště při pohybu je dána souřadnicemi

$$x_o = \frac{\ell}{2} \cos \varphi , \qquad y_o = \frac{\ell}{2} \sin \varphi ,$$

složky vektoru rychlosti těžiště jsou

$$\dot{x}_o = -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \, \dot{\varphi} ,$$

$$\dot{y}_o = \frac{\ell}{2} \cos \varphi \, \dot{\varphi} .$$

Potom

$$v_o^2 = \dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2 = \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 .$$

Kinetická energie pohybu je

$$W_k = \frac{1}{8} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 .$$

Ze zákona zachování energie platí

$$mg \frac{\ell}{2} = mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi + \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 ,$$

a tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell} (1 - \sin \varphi)} .$$

Okamžitá rychlost bodu A je dána součtem y-složky rychlosti translačního pohybu těžiště a obvodové rychlosti bodu A odpovídající rotaci kolem těžiště

$$v_A = \frac{\ell}{2} \omega \cos \varphi + \frac{\ell}{2} \omega .$$

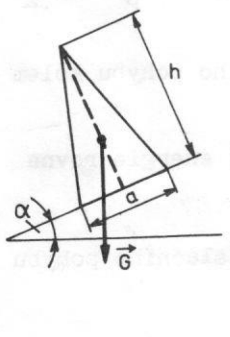
Rychlost dopadu konce A tyče na vodorovnou rovinu dostaneme pro $\varphi = 0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} ,$$

$$v_A = \ell \omega = \sqrt{3 g \ell} .$$

Ú l o h a 118 : Určete těžiště pravidelného čtyřbokého jehlanu výšky h .

[Vzdálenost těžiště od základny $z_o = \frac{h}{4}$]



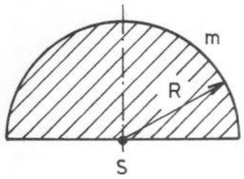
Ú l o h a 119 : Na nakloněné rovině spočívá jehlan se čtvercovou základnou o straně a a výšce h tak, jak je patrno z obrázku. Při jakém úhlu α vzniká nebezpečí, že se jehlan překlopí kolem hrany své základny?

[$\alpha \geq \mathrm{arctg} \frac{2a}{h}$]

Ú l o h a 120 : Vypočtěte moment setrvačnosti setrvačníku hmotnosti M, vnitřního poloměru R_1 a vnějšího R_2.

$$\left[J = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2) \right]$$

Ú l o h a 121 : Určete moment setrvačnosti poloviny homogenní kruhové desky hmotnosti m, poloměru R, vzhledem k ose procházející středem S kolmo k desce.



$$\left[J = \frac{1}{2} mR^2 \right]$$

Ú l o h a 122 : Určete práci potřebnou ke zvýšení otáček setrvačníku z hodnoty $n_1 = 333 \text{ min}^{-1}$ na $n_2 = 360 \text{ min}^{-1}$, je-li jeho moment setrvačnosti $J = 12.10^3$ kg.m^2.

$$\left[A \doteq \cancel{1,3}\ 1{,}23 .10^6 \text{ J} \right]$$

Ú l o h a 123 : Kruhový kotouč hmotnosti m a průměru d se má za čas t roztočit o jednu otáčku. Určete sílu, která musí působit tangenciálně na jeho obvodu.

$$\left[F = \frac{\pi md}{t^2} \right]$$

Ú l o h a 124 : Určete, jakým momentem je třeba působit na válcový setrvačník poloměru r a hmotnosti m, abychom jej za čas t roztočili na n otáček.

$$\left[M = \frac{\pi mr^2 n}{60t} \right]$$

Ú l o h a 125 : Setrvačné kolo momentu setrvačnosti J = 540 kg.m^2 je z klidu roztáčeno momentem, který roste úměrně s časem tak, že v čase t_1 = 10 s dosáhne hodnoty M_1 = 100 N.m. Určete frekvenci, které dosáhne v čase t_2 = 72 s.

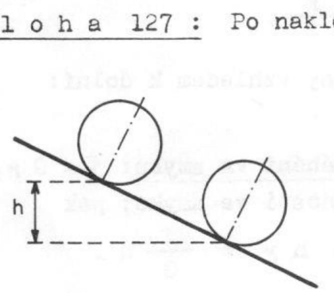
$$\left[f = \frac{M_1 t_2^2}{4\pi J t_1} = 7{,}65 \text{ s}^{-1} \right]$$

Ú l o h a 126 : Po nakloněné rovině úhlu α se valí bez klouzání plný homogenní kotouč. Určete lineární zrychlení středu kotouče.

$$\left[a = \frac{2}{3} g \sin\alpha \right]$$

Ú l o h a 127 : Po nakloněné rovině se valí beze smyku koule. Určete rychlost, kterou bude mít střed koule v místě položeném o h níže, než je výchozí poloha.

$$\left[v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \right]$$



Ú l o h a 128 : Disk o průměru d a hmotnosti m se otáčí s frekvencí n . Účinkem brzdění se zastaví za dobu t. Určete potřebný brzdicí moment M.

$$\left[M = \frac{\pi}{240} \frac{md^2 n}{t} \right]$$