1.2. Dynamika hmotného bodu

Studuje příčiny pohybu a jaký druh pohybu tato příčina vyvolává.

Pohybové zákony:

1. Z á k o n s e t r v a č n o s t i : Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno působením jiného tělesa tento stav změnit.

2. Z á k o n s í l y : Vnější síla $\vec{F}$, působící na těleso, jehož hmotnost je m, způsobí pohyb zrychlený, pro který platí vztah

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} . \qquad [\vec{F}] = N = kg.m.s^{-2}.$$

Je-li m = konst, můžeme vyjádřit sílu

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} ,$$

kde $\vec{p} = m\vec{v}$ je vektor hybnosti; $[\vec{p}] = kg.m.s^{-1}$.
Integrál síly v intervalu času (t_1, t_2)

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} , \qquad [\vec{I}] = N\,s = kg.m.s^{-1},$$

je impuls síly $\vec{I}$, který způsobí přírůstek hybnosti $\Delta\vec{p}$.
Zákon síly vyjadřuje tzv. vektorovou pohybovou rovnici. Rozepíšeme-li vztah

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

složkově, tj. $F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$, můžeme tuto vektorovou rovnici nahradit třemi skalárními rovnicemi

$$F_x = m\ddot{x} , \qquad F_y = m\ddot{y} , \qquad F_z = m\ddot{z} ,$$

které nazýváme pohybové rovnice. Jejich integrací lze stanovit průběh pohybu, známe-li působící vnější síly. Integrál každé z rovnic obsahuje dvě integrační konstanty, jejichž hodnoty se určí z počátečních podmínek.

3. Z á k o n a k c e a r e a k c e :
Působí-li jedno těleso na druhé silou $\vec{F}$, působí zároveň druhé na první silou $\vec{F}'$, která je stejně velká a má opačný směr, tj.

$$\vec{F}' = -\vec{F} .$$

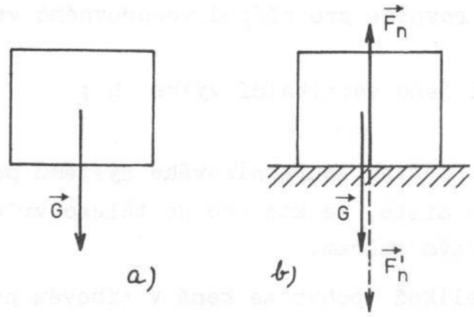
Je důležité si uvědomit, že síly akce a reakce působí na různá tělesa. Přitom obě síly současně vznikají a současně zanikají.

Pohybové zákony platí jen v souřadnicové soustavě inerciální, což je soustava, která je vůči stálicím v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Systém souřadnic spojený pevně se Zemí lze pro řešení mnoha praktických úloh považovat za přibližně inerciální. Jeho neinerciálnost je způsobena rotací Země, kterou v praxi můžeme zanedbat.

Nejdůležitější případy sil

1. T í h o v á s í l a : uděluje hmotnému bodu v tíhovém poli tíhové zrychlení $\vec{g}$ a je tedy rovna

$$\vec{G} = m\vec{g} .$$



2. N o r m á l o v á   s í l a :

a) Tíhová síla $\vec{G}$ působící na volné těleso způsobí rovnoměrně zrychlený pohyb (volný pád) tělesa.

b) Nachází-li se toto těleso v klidovém stavu na podložce, pak podle 2. pohybového zákona je výsledná síla na toto těleso rovna nule. Musí proto na těleso působit další síla $\vec{F}_n$, která je stejně velká a opačného směru jako tíhová síla $\vec{G}$, tak aby platilo $\vec{G} + \vec{F}_n = 0$. $\vec{F}_n$ se nazývá normálová síla; je to síla, kterou působí podložka na těleso. Obě síly $\vec{G}$ i $\vec{F}_n$ působí na stejné těleso!

Síla $\vec{F}_n'$ je pak reakcí na sílu $\vec{F}_n$. $\vec{F}_n'$ je síla, kterou těleso působí na podložku; $\vec{F}_n' = -\vec{F}_n$. Síly $\vec{F}_n'$, $\vec{F}_n$ jsou stejně velké a opačného směru, působící však na dvě různá tělesa!

3. S e t r v a č n á   s í l a : působí na hmotný bod pohybující se zrychlením $\vec{a}$ v důsledku působící vnější síly $\vec{F}$, a je dána

$$\vec{F}_s = -m\vec{a} .$$

Přitom v každém okamžiku pohybu je součet vnější a setrvačné síly roven nule

$$\vec{F} + \vec{F}_s = \vec{F} - m\vec{a} = 0 .$$

4. S í l a   s m y k o v é h o   t ř e n í : vnější tečná síla, která působí proti pohybu; leží v rovině styčných ploch těles:

$$F_t = \mu F_n ,$$

kde μ je koeficient smykového tření,
F_n - normálová složka přítlačné síly.

5. D o s t ř e d i v á   a   o d s t ř e d i v á   s í l a :

Dostředivá síla je dána složkou vnější síly, způsobující křivočarý pohyb, do směru hlavní normály k dráze

$$\vec{F}_d = m\vec{a}_n = \frac{mv^2}{R}\vec{n} ,$$

kde v je rychlost pohybu,
R - poloměr křivosti,
$\vec{n}$ - jednotkový vektor ve směru hlavní normály orientovaný do středu křivosti dráhy.

Tato síla ovlivňuje pouze směr pohybu.

Odstředivá síla představuje v inerciálním souřadnicovém systému setrvačnou sílu hmotného bodu, způsobenou zakřivováním jeho dráhy;

$$\vec{F}_o = -\frac{mv^2}{R}\vec{n} .$$

V neinerciálním systému má tato síla však charakter síly vnější.

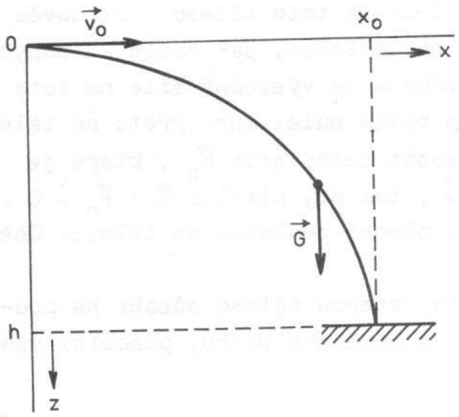
Pro rovnoměrný pohyb kruhový, kdy $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, $v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$, je velikost síly odstředivé rovna

$$F_o = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2} = mr\,4\pi^2 f^2 .$$

Ú l o h a 36 : Sestavte a integrujte pohybové rovnice pro případ vodorovného vrhu s počáteční rychlostí $\vec{v}_0$ $(v_0, 0, 0)$. Určete:

a) horizontální vzdálenost místa dopadu, je-li jeho vertikální výška h ;

b) celkovou dobu pohybu do okamžiku dopadu.



Řešení: Počátek souřadnicového systému položíme do místa, ze kterého je těleso vrženo vodorovným směrem.

Jelikož pohyb se koná v tíhovém poli, bude v každém okamžiku pohybu působit na těleso konstantní síla rovná jeho tíze $\vec{G}(0, 0, mg) = m\,\vec{g}$.

Pohybové rovnice mají tedy tvar:

$$m\ddot{x} = 0\,, \qquad m\ddot{y} = 0\,, \qquad m\ddot{z} = mg$$

nebo

$$\ddot{x} = 0\,, \qquad \ddot{y} = 0\,, \qquad \ddot{z} = g\,.$$

Jejich integrací dostáváme

$$x = A_1 t + A_2\,,$$
$$y = A_3 t + A_4\,,$$
$$z = \frac{1}{2} g t^2 + A_5 t + A_6\,.$$

Integrační konstanty $A_1, \ldots, A_6$ určíme z počátečních podmínek pohybu v čase $t = 0$: $x = y = z = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = \dot{z} = 0$. Odtud máme

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0\,, \qquad A_1 = v_0\,.$$

Řešení pohybových rovnic je tedy ve tvaru:

$$x = v_0 t\,,$$
$$y = 0\,,$$
$$z = \frac{1}{2} g t^2\,,$$

což jsou parametrické rovnice pohybu. Vyloučením času t z těchto rovnic dostaneme rovnici dráhy pohybu

$$z = \frac{g}{2v_0^2} x^2\,,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem v počátku a osou z .

Souřadnici x_0 určíme z rovnice dráhy pohyby pro $z = h$:

$$h = \frac{g}{2v_0^2} x_0^2 \Rightarrow x_0 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Celkový čas t_0 pohybu určíme z kterékoli parametrické rovnice pro $x(t)$ nebo $z(t)$:

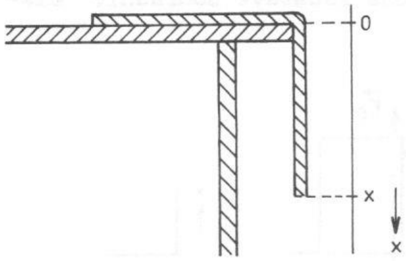
$$t_0 = \frac{x_0}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Ú l o h a 37 : Část ohebného řetězu celkové délky d visí přes okraj stolu. Tření mezi řetězem a povrchem stolu je zanedbatelné. Vlivem tíhy převislé části se dá řetěz do pohybu. Určete závislost délky převislé části $x(t)$ na čase, je-li na počátku pohybu délka převislé části d_0 .

Řešení: Okamžité zrychlení pohybu řetězu je dáno tíhou okamžité délky jeho převislé části, tj.:

$$F(x) = \frac{m}{d} gx\,,$$

kde m je hmotnost celého řetězu.



Pohybová rovnice má tvar

$$\frac{m}{d}\, gx = m\,\ddot{x}$$

nebo

$$\ddot{x} - \frac{g}{d}\, x = 0 \,.$$

Řešení rovnice je

$$x(t) = A\, e^{\sqrt{\frac{g}{d}}\,t} + B\, e^{-\sqrt{\frac{g}{d}}\,t} \,.$$

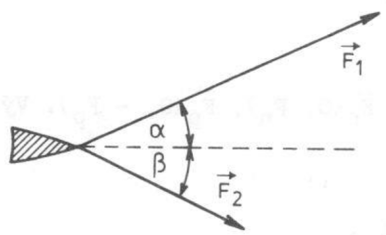
Integrační konstanty A, B se určí z počátečních podmínek: pro $t = 0$ je $x(0) = d_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Je tedy

$$\begin{matrix} A + B = d_0 \\ A - B = 0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; A = B = \frac{d_0}{2} \,.$$

Hledaná časová závislost je tedy

$$x(t) = d_0 \cosh \sqrt{\frac{g}{d}}\; t \,.$$

Ú l o h a 38 : Nalezněte velikost a směr výslednice dvou daných sil, které působí na malý člun podle uvedeného obrázku.

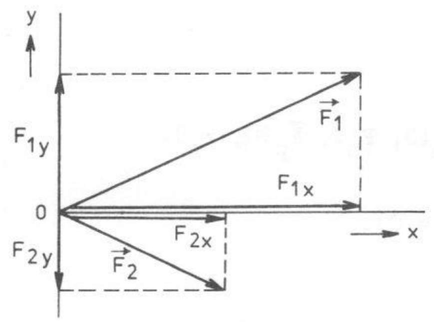


Řešení: Ve zvolené soustavě souřadnic rozložíme oba vektory sil do složek:

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha \,, \qquad F_{1y} = F_1 \sin\alpha \,,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\beta \,, \qquad F_{2y} = F_2 \sin\beta \,,$$

kde F_1, F_2 jsou velikosti vektorů $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (protože β je záporné, $F_{2y} < 0$).



Z vektorového vztahu pro součet vektorů

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

máme dvě skalární rovnice pro složky výslednice $\vec{F}$:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \,,$$

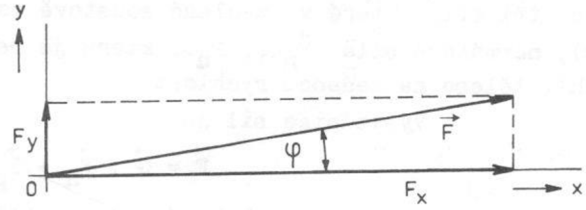
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \,.$$

Velikost výsledné síly $\vec{F}$ je tedy

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \,,$$

její směr je dán úhlem φ, pro který platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_y}{F_x} \,.$$

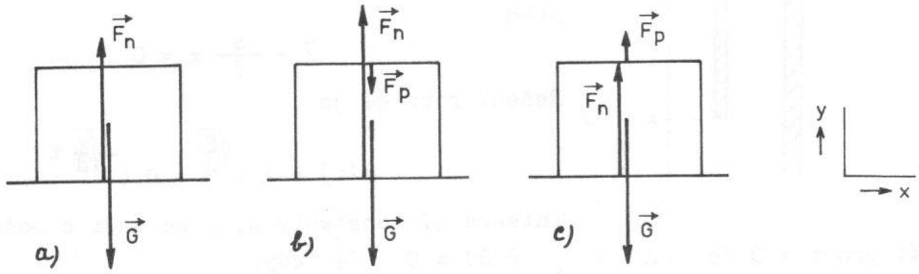


Ú l o h a 39 : Těleso hmotnosti m se nachází v klidu na horizontální rovině. Určete: 1) normálovou sílu na těleso působící,

2) normálovou sílu, působíme-li na těleso kolmo silou F_p směrem dolů,

3) normálovou sílu, působíme-li na těleso kolmo silou F_p směrem vzhůru.

Řešení: Pro každý případ zvlášť si znázorníme ve zvolené soustavě souřadnic diagram sil.



ad a - obr. 1: na těleso působí dvě síly, které ve zvolené soustavě souřadnic jsou popsány: tíhová síla $\vec{G}(0, -mg)$ a normálová síla $\vec{F}_n(0, F_n)$ - reakce roviny, kterou rovina působí na těleso. Výslednice sil je $\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_n$.
Vektorová pohybová rovnice tělesa má tvar

$$\vec{G} + \vec{F}_n = 0 ,$$

neboť těleso je v klidu $\rightarrow \vec{a} = 0$.
Rozepsáním rovnice do složek dostáváme

$$F_n - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg.$$

ad b - obr. 2: na těleso působí tři síly: $\vec{G}(0, -mg)$, $\vec{F}_n(0, F_n)$, $\vec{F}_p(0, -F_p)$. Výslednice sil je $\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p$.
Vektorová pohybová rovnice má tvar

$$\vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p = 0 \qquad (\text{opět } \vec{a} = 0).$$

Ve složkách:

$$F_n - mg - F_p = 0$$

a tedy

$$F_n = mg + F_p .$$

ad c - obr. 3: opět působí tři síly: $\vec{G}(0, -mg)$, $\vec{F}_n(0, F_n)$, $\vec{F}_p(0, F_p)$.
Vektorová rovnice má tvar

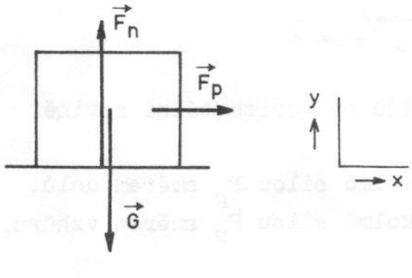
$$\vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p = 0 \qquad (\vec{a} = 0).$$

Ve složkách: $F_n + F_p - mg = 0$
a tedy

$$F_n = mg - F_p .$$

Úloha 40: Určete sílu F_p potřebnou k urychlení tělesa $m = 20$ kg za 2 s z klidu na rychlost $v = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$ na dokonale hladké horizontální rovině.

Řešení: Na těleso působí tři síly, které ve zvolené soustavě souřadnic jsou popsány: tíhová síla $\vec{G}(0, -mg)$, normálová síla $\vec{F}_n(0, F_n)$, která je reakcí roviny, a síla $\vec{F}_p(F_p, 0)$, která urychlí těleso na zadanou rychlost.



Výslednice sil je

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p .$$

Vektorová pohybová rovnice tělesa je pak

$$\vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p = m\,\vec{a} .$$

Vektor zrychlení má složky $\vec{a}(a_x, 0)$, můžeme vektorovou rovnici rozepsat do složkového tvaru

$$F_p = ma_x , \qquad F_n - mg = 0 .$$

Máme dvě rovnice pro dvě neznámé F_p, F_n. Tedy:

$$F_n = mg \doteq 20.9,8 = 196 \text{ N},$$

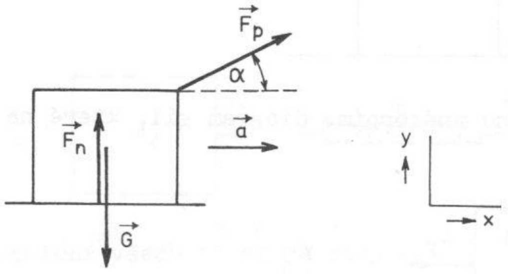
$$F_p = ma_x = m\frac{v}{t} = 20.\frac{0,5}{2} = 5 \text{ N}.$$

Ú l o h a 41 : Těleso hmotnosti m se pohybuje po dokonale hladké horizontální rovině působením síly $\vec{F}_p$, která svírá s rovinou úhel α. Určete:

a) zrychlení tělesa,

b) velikost normálové síly $\vec{F}_n$, tj. reakce roviny, kterou tato působí na těleso.

Řešení: Na těleso působí tři síly: $\vec{G}$, $\vec{F}_n$, $\vec{F}_p$, které ve zvolené soustavě souřadnic jsou popsány:



$$\vec{F}_p = (F_p \cos\alpha,\ F_p \sin\alpha),$$

$$\vec{G} = (0,\ -mg),$$

$$\vec{F}_n = (0,\ F_n).$$

Vektor zrychlení tělesa má složky:

$$\vec{a} = (a_x,\ 0).$$

Výslednice sil je

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p.$$

Vektorová pohybová rovnice tělesa je

$$\vec{G} + \vec{F}_n + \vec{F}_p = m\,\vec{a},$$

která ve složkovém vyjádření přechází v rovnice

$$F_p \cos\alpha = ma_x,$$

$$-mg + F_n + F_p \sin\alpha = 0.$$

To jsou dvě rovnice pro dvě neznámé a_x, F_n:

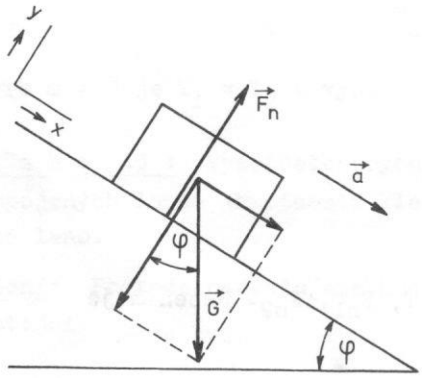
$$a_x = \frac{F_p \cos\alpha}{m},$$

$$F_n = mg - F_p \sin\alpha.$$

Ú l o h a 42 : Určete zrychlení tělesa hmotnosti m a normálovou sílu působící na těleso při pohybu na dokonale hladké nakloněné rovině úhlu φ.

Řešení: Kladný směr osy x položíme do směru pohybu, kladný směr osy y pak kolmo vzhůru.

Ve zvolené soustavě souřadnic působí na těleso dvě síly: tíhová síla $\vec{G}(mg \sin\alpha,\ -mg \cos\alpha)$ a normálová síla $\vec{F}_n(0,\ F_{ny})$. Vektor zrychlení $\vec{a}(a_x,\ 0)$ směřuje v kladném směru osy x.



Vektorová pohybová rovnice je

$$\vec{G} + \vec{F}_n = m\,\vec{a},$$

která ve složkách dává

$$mg \sin\alpha = ma_x,$$

$$-mg \cos\alpha + F_{ny} = 0.$$

Získali jsme dvě rovnice pro dvě neznámé: a_x, F_{ny}. Řešení je

$$F_{ny} = mg \cos \alpha ,$$
$$a_x = g \sin \alpha .$$

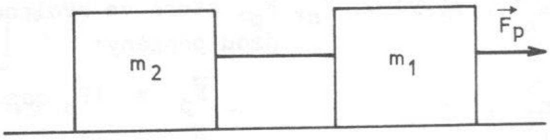
Je vidět, že pokud $\varphi > 0^\circ$, normálová síla $F_{ny} < mg$ - tíha tělesa. Pro $\varphi < 90^\circ$ je $a_x < g$.

Ú l o h a 43 : Dvě tělesa m_1, m_2 se nacházejí na horizontální dokonale hladké rovině a jsou spojena nehmotným lanem (tzn. jeho hmotnost se zanedbává vzhledem k hmotnostem těles.) Na jedno z těles působí horizontální síla velikosti F_p.

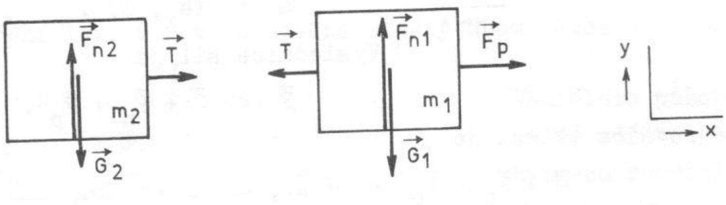
Určete: a) zrychlení těles,

b) sílu, která napíná lano.

Řešení:



Zvolíme soustavu souřadnic a pro každé těleso znázorníme diagram sil, které na něj působí.



Na těleso m_1 působí síly: síla $\vec{F}_p(F_p, 0)$, tíhová síla $\vec{G}_1(0, -mg)$, normálová síla -(reakce roviny) $\vec{F}_{n1}(0, F_{n1})$ a síla $\vec{T}(-T, 0)$, která je (podle 3. pohybového zákona) reakce lana na sílu, kterou těleso m_1 působí na lano.

Výsledná síla, která působí na těleso m_1, je

$$\vec{F}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_p + \vec{F}_{n1} + \vec{T} .$$

Na těleso m_2 působí síly: tíhová síla $\vec{G}_2(0, -m_2 g)$, normálová síla $\vec{F}_{n2}(0, F_{n2})$ a síla $\vec{T}(T, 0)$, kterou lano působí na těleso m_2.

Výsledná síla je

$$\vec{F}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{n2} + \vec{T} .$$

Obě tělesa se pohybují se stejným zrychlením $\vec{a}(a_x, 0)$, proto vektorové pohybové rovnice pro obě tělesa jsou

$$\vec{G}_1 + \vec{F}_p + \vec{F}_{n1} + \vec{T} = m_1 \vec{a} ,$$
$$\vec{G}_2 + \vec{F}_{n2} + \vec{T} = m_2 \vec{a} .$$

Ve složkovém tvaru:

$$F_p - T = m_1 a_x$$
$$- m_1 g + F_{n1} = 0$$

....

$$T = m_2 a_x$$
$$- m_2 g + F_{n2} = 0$$

Získali jsme čtyři rovnice pro čtyři neznámé: a_x, T, F_{n1}, F_{n2}. Řešením je

$$a_x = \frac{F_p}{m_1 + m_2} ,$$

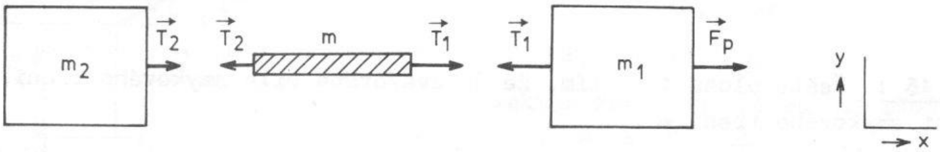
$$T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F_p ,$$

$$F_{n1} = m_1 g ,$$

$$F_{n2} = m_2 g .$$

Ú l o h a 44 : Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že je uvažována hmotnost lana m (nelze ji tedy zanedbat).

Řešení: Ve zvolené soustavě souřadnic vyjádříme diagram sil pro každé těleso (síly $\vec{G}$ a $\vec{F}_n$ nejsou uvažovány, protože nepřispívají ke zrychlení ani k síle, která napíná lano, jak plyne z výsledků předchozí úlohy).



Zrychlení všech těles je stejné: $\vec{a}(a_x, 0)$.

Protože lano hmotnosti m má zrychlení, musí na jeho koncích působit různé síly, pro jejichž rozdíl můžeme napsat pohybovou rovnici lana

$$T_1 - T_2 = m a_x ,$$

kde T_1 je velikost síly, kterou těleso m_1 působí na lano (reakce na tuto sílu je síla $-\vec{T}_1$, kterou lano působí na těleso m_1, která má stejnou velikost, ale je opačného směru) a T_2 je velikost síly, kterou těleso m_2 působí na lano a která je reakcí na sílu $\vec{T}_2$, kterou lano působí na těleso m_2.

Pro tělesa m_1 a m_2 máme pohybové rovnice

$$F_p - T_1 = m_1 a_x ,$$

$$T_2 = m_2 a_x .$$

Získali jsme tři rovnice pro tři neznámé: a_x, T_1, T_2. Řešení je

$$a_x = \frac{F_p}{m_1 + m_2 + m} ,$$

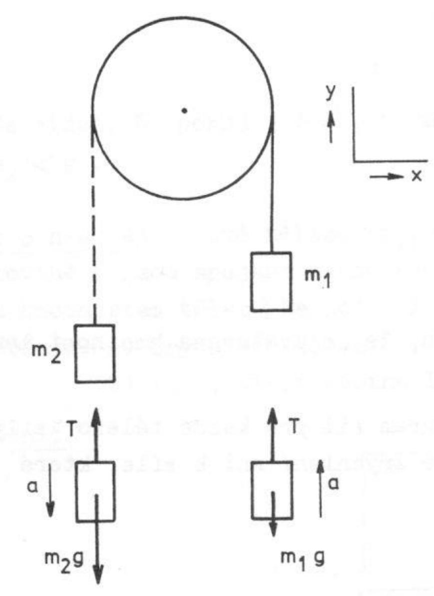
$$T_1 = \frac{m_2 + m}{m_1 + m_2 + m} F_p ,$$

$$T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m} F_p .$$

Pro m = 0 je $T_1 = T_2$ a výsledek je shodný s řešením předchozí úlohy.

Ú l o h a 45 : Vyšetřete zrychlení dvou těles m_1, m_2 ($m_2 > m_1$) na kladce vzájemně spojených lanem (hmotnosti kladky a lana jsou zanedbány). Určete sílu, která napíná lano.

Řešení: Protože neuvažujeme hmotnost lana, musí být síla T na jeho obou koncích stejná.



Protože $m_2 > m_1$, těleso m_2 je urychlováno směrem dolů, těleso m_1 nahoru. Je zřejmé, že platí

$$m_1 g < T < m_2 g \,.$$

Zrychlení a obou těles je stejné. Pohybové rovnice pro obě tělesa ve zvolené soustavě souřadnic mají tvar

$$T - m_1 g = m_1 a \,,$$

$$T - m_2 g = - m_2 a \,.$$

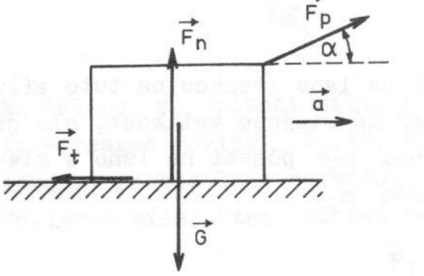
Získali jsme dvě rovnice pro dvě neznámé: a, T. Potom

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g \,,$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g \,.$$

Ú l o h a 46 : Řešte úlohu 41 s tím, že je uvažována síla smykového tření, je-li koeficient smykového tření μ.

Řešení: Síla tření leží v rovině styčné plochy obou těles a má opačný směr než je směr pohybu.



Na těleso působí čtyři síly, pro které můžeme psát vektorovou pohybovou rovnici

$$\vec{G} + \vec{F}_p + \vec{F}_n + \vec{F}_t = m\,\vec{a} \,.$$

Ve zvolené soustavě souřadnic můžeme síly rozložit do složek: $\vec{G}(0,\, - mg)$, $\vec{F}_p(F_p \cos\alpha,\; F_p \sin\alpha)$, $\vec{F}_n(0,\, F_n)$, $\vec{F}_t(-\mu F_n,\, 0)$, a vektor zrychlení pohybu $\vec{a}(a,\, 0)$.

Rozepsáním vektorové rovnice do složek dostaneme dvě skalární rovnice:

$$F_p \cos\alpha - \mu F_n = ma \,,$$

$$- mg + F_p \sin\alpha + F_n = 0 \,.$$

Řešení je

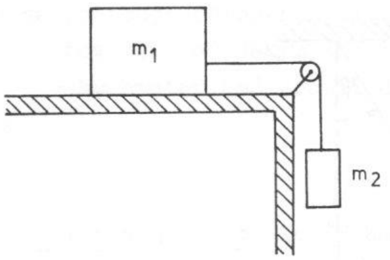
$$a = \frac{F_p \cos\alpha - \mu F_n}{m} \,,$$

$$F_n = mg - F_p \sin\alpha \,.$$

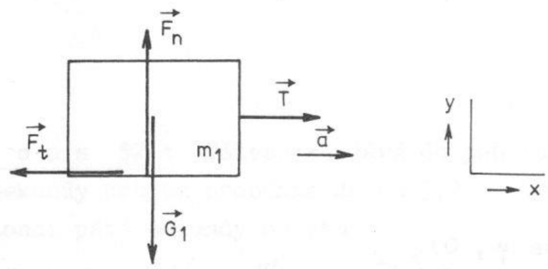
Je tedy zrychlení pohybu

$$a = \frac{F_p(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - \mu mg}{m} \,.$$

Ú l o h a 47 : Určete zrychlení soustavy dvou těles o hmotnostech m_1, m_2, vzájemně spojených nehmotným lanem (tzn. že hmotnost lana se neuvažuje). Těleso m_1 se pohybuje po vodorovné rovině, koeficient smykového tření je μ. Těleso m_2 je volně zavěšeno přes kladku, jejíž hmotnost se rovněž zanedbává. Jak velká musí být hmotnost m_2, aby se soustava vůbec pohybovala?



Řešení: Ve zvolené soustavě souřadnic vyjádříme pro každé těleso diagram sil a sestavíme jeho pohybovou rovnici.



A) Těleso m_1 :

Na těleso m_1 působí čtyři síly:

tíhová síla $\vec{G}_1(0, -m_1 g)$,

normálová síla $\vec{F}_n(0, F_n)$,

síla - tah lana $\vec{T}(T, 0)$,

síla tření $\vec{F}_t(-\mu F_n, 0)$.

Pohybová rovnice tělesa m_1 ve vektorovém tvaru je

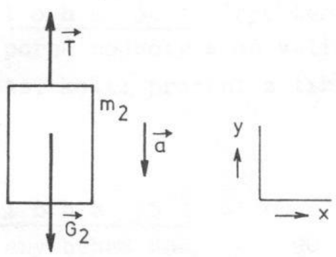
$$\vec{G}_1 + \vec{F}_n + \vec{T} + \vec{F}_t = m_1 \vec{a},$$

kde $\vec{a}(a, 0)$ je vektor zrychlení pohybu soustavy.

Rozepsáním do složek máme rovnice

$$T - \mu F_n = m_1 a \qquad (a)$$

$$-m_1 g + F_n = 0 \qquad (b)$$



B) Těleso m_2 :

Na těleso m_2 působí dvě síly:

tíhová síla $\vec{G}_2(0, -m_2 g)$,

síla lana $\vec{T}(0, T)$.

Pohybová rovnice tělesa m_2 je

$$\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a},$$

kde $\vec{a}(0, -a)$ je zrychlení pohybu tělesa.

Rozepsáním do složek máme pouze jednu rovnici

$$-m_2 g + T = -m_2 a \qquad (c)$$

Dostali jsme tak tři rovnice pro tři neznámé: a, T, F_n. Řešení je:

$$F_n = m_1 g,$$

$$T = m_1 m_2 g \frac{1 + \mu}{m_1 + m_2},$$

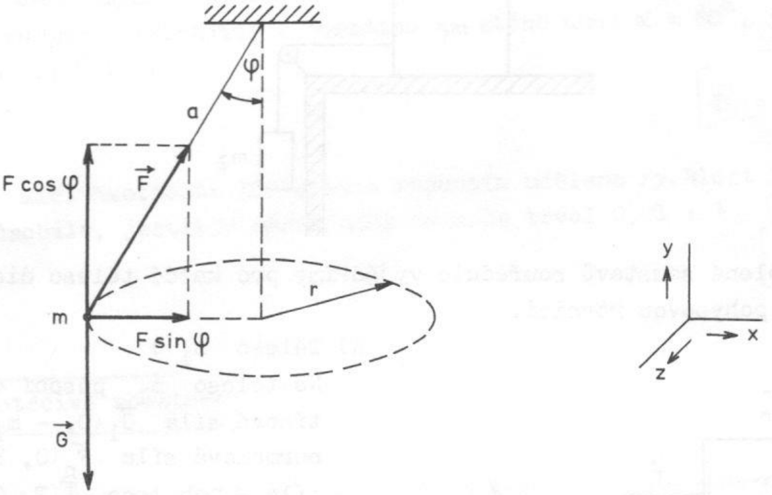
$$a = g \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}.$$

Pro $m_2 > \mu m_1$ soustava vykonává pohyb zrychlený.

Ú l o h a 48 : Hmotný bod m , zavěšený na závěsu délky a , koná rovnoměrný pohyb po kružnici poloměru $r = a \sin \varphi$, kde φ je úhel, který závěs svírá s vertikálním směrem.

Určete obvodovou rychlost, periodu pohybu hmotného bodu a sílu, která působí na závěs.

Řešení:



Na hmotný bod působí dvě síly:

tíhová síla $\vec{G}(0, -mg, 0)$,

tahová síla závěsu $\vec{F}(F \sin\varphi, F\cos\varphi, 0)$.

Vektor zrychlení pohybu hmotného bodu je $\vec{a}\left(\frac{v^2}{r}, 0, \frac{dv}{dt} = 0\right)$ (x-ová složka tahové síly $F \sin\varphi$ představuje dostředivou sílu působící na hmotný bod; x-ová složka zrychlení reprezentuje pak dostředivé zrychlení).

Vektorová pohybová rovnice hmotného bodu je

$$\vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}\,.$$

Rozepsáním do složek máme dvě rovnice pro neznámé v, F :

$$F\sin\varphi = m\frac{v^2}{r},$$

$$-mg + F\cos\varphi = 0$$

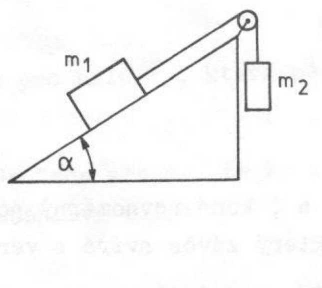
Řešení je:

$$F = \frac{mg}{\cos\varphi},$$

$$v = \sqrt{\frac{ag\sin^2\varphi}{\cos\varphi}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\cos\varphi}{g}}\,.$$

Úloha 49 : Na horním konci dokonale hladké nakloněné roviny je upevněna kladka, přes kterou jde vlákno. Na jednom konci vlákna je závaží m_1, ležící na nakloněné rovině, na druhém konci visí závaží m_2. Určete, s jakým zrychlením se pohybují závaží a jaké je namáhání vlákna. Kdy budou závaží v klidu? (Hmotnost vlákna je proti m_1 a m_2 zanedbatelná.)

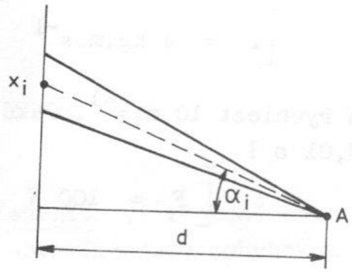


$$a = \frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2}\,g$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha)g$$

$$m_2 = m_1\sin\alpha$$

Ú l o h a 50 : Hmotný bod se pohybuje působením tíže po dokonale hladké nakloněné rovině. Pod jakým úhlem α_i je třeba sklonit rovinu, aby hmotný bod urazil dráhu $\overline{x_i A}$ v nejkratší době?



$$\left[\ \alpha_i = 45^\circ\ \right]$$

Ú l o h a 51 : Zdviž hmotnosti 3600 kg se pohybuje vzhůru s konstantním zrychlením 1,2 $m.s^{-2}$. Určete:

a) sílu F_1 napínající lano, je-li zdviž prázdná,

b) sílu F_2, kterou působí podlaha zdviže na cestujícího hmotnosti 70 kg.

$$\left[\begin{array}{l} F_1 = 3{,}96.10^4 \text{ N} \\ F_2 = 770 \text{ N} \end{array}\right]$$

Ú l o h a 52 : Těleso se dává do pohybu působením síly F = 0,02 N a za první čtyři sekundy pohybu proběhne dráhu 3,2 m. Určete jeho hmotnost a rychlost, kterou má na konci páté sekundy pohybu.

$$\left[\begin{array}{l} m = 0{,}05 \text{ kg} \\ v = 2 \text{ ms}^{-1} \end{array}\right]$$

Ú l o h a 53 : Na jak dlouhé vodorovné dráze dosáhne vůz hmotnosti 800 kg rychlosti 45 $km.h^{-1}$, pohání-li jej motor konstantní silou 2 kN (veškeré odpory se zanedbávají)?

$$\left[\ x = 31{,}3 \text{ m}\ \right]$$

Ú l o h a 54 : Zrychlení vlaku hmotnosti 4.10^5 kg na dráze o stoupání 3 ‰ je záporné hodnoty a má velikost 0,015 $m.s^{-2}$. Lokomotiva vyvíjí tah silou 30 kN. Určete, kolik procent z tíhy vlaku připadá na pasívní odpory.

$$\left[\ 0{,}6\ \%\ \right]$$

Ú l o h a 55 : Jakou silou je třeba působit na vagón hmotnosti $m = 1{,}5.10^4$ kg, aby během doby t = 90 s dosáhl rychlosti $v = 3\ m.s^{-1}$? Jak se změní řešení, budeme-li uvažovat tření mezi vagónem a kolejnicemi, je-li koeficient tření $\mu = 10^{-2}$?

$$\left[\begin{array}{l} F = \frac{mv}{t} = 500 \text{ N} \\ F' = m\frac{v}{t} + m\,\varphi\,\mu = 1979{,}5 \text{ N} \end{array}\right]$$

Ú l o h a 56 : Pohyb vlaku o rychlosti v byl zastaven za dobu t. Určete brzdnou sílu, kterou bylo třeba vyvinout na jedno kolo, je-li známo, že hmotnost vlaku je m , počet kol, která se brzdí, je n , koeficient tření kol o koleje je μ_1 a kol o brzdové ústrojí μ_2.

$$\left[\ F = \frac{m(v - \mu_1 g t)}{n\,\mu_2 t}\ \right]$$

Ú l o h a 57 : Lokomotiva táhne vlak hmotnosti 5.10^5 kg po dráze se stoupáním α. Vlak se pohybuje konstantní rychlostí, přičemž tažná síla $F = 5.10^4$ N. Určete stoupání dráhy, při zanedbání síly tření.

$$\left[\ \alpha \doteq 35'\ \right]$$

Ú l o h a 58 : Jaký impuls udělí stěna pružné kouli hmotnosti $m = 200$ g, která naráží na stěnu ve směru svírající s normálou ke stěně úhel $\alpha = 60^o$, je-li rychlost koule $v_o = 20\ m.s^{-1}$?

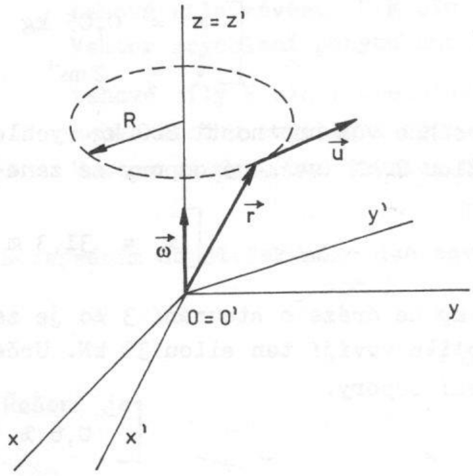
$$\left[I = 4\ kg.m.s^{-1} \right]$$

Ú l o h a 59 : Míči hmotnosti 100 g byla kopnutím udělena rychlost 10 $m.s^{-1}$. Jaká síla na něj působila, jestliže náraz nohy do míče trval 0,01 s ?

$$\left[F = 100\ N \right]$$

1.3. Pohyb v otáčivé soustavě

Souřadnicová soustava $S'(O', x', y', z')$ se otáčí úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ vzhledem k inerciální soustavě $S(O, x, y, z)$, přičemž obě soustavy mají společný počátek $O = O'$ a osu $z = z'$.



Okamžitá poloha hmotného bodu je dána polohovým vektorem $\vec{r}$, stejným v obou soustavách:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'.$$

Pohybuje-li se hmotný bod v soustavě S rychlostí $\vec{v}$, je jeho rychlost $\vec{v}'$ v soustavě S' rovna

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u},$$

kde $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ je unášivá rychlost, jakou se jednotlivé body spojené s S' pohybují vzhledem k soustavě S.

Vztah pro rychlost $\vec{v}'$ můžeme vyjádřit pomocí polohového vektoru

$$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{r},$$

kde čárkou u derivace je naznačena derivace polohového vektoru vyjádřeného souřadnicemi v systému S'. Tento transformační vztah platí pro časovou derivaci jakéhokoliv vektoru. Proto pro zrychlení $\vec{a}'$ hmotného bodu v systému S' můžeme psát:

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Je-li úhlová rychlost konstantní, tj. $\vec{\omega} = \vec{k} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = 0$, pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

a pro sílu $\vec{F}'$, která působí na hmotný bod m v otáčivé soustavě, máme

$$\vec{F}' = m\,\vec{a}' = m\,\vec{a} - 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Je tedy zřejmé, že ke skutečné síle $\vec{F} = m\,\vec{a}$ přistupují v otáčivé soustavě S' další zdánlivé síly:

$$\vec{F}_c^* = 2m\,\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

je síla Coriolisova, která je nenulová, když se hmotný bod pohybuje v soustavě S' rychlostí $\vec{v}'$ jiného směru než je směr osy rotace.

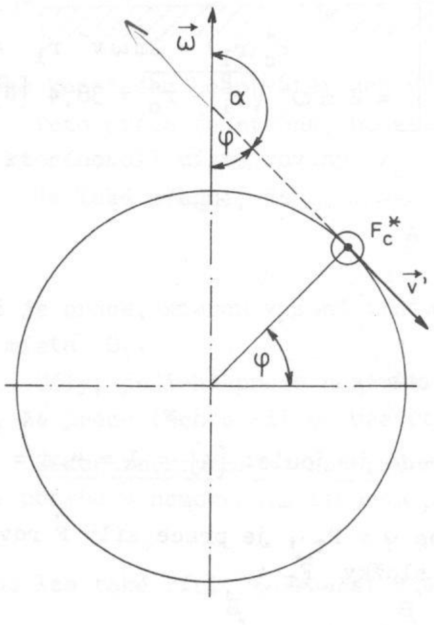
Zdánlivá síla

$$\vec{F}_o^* = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

směřuje radiálně od osy rotace - je to síla odstředivá. Jelikož unášivá rychlost $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ má velikost $u = \omega R$, velikost této síly je

$$F_o^* = m\omega^2 R = m\frac{u^2}{R} .$$

Ú l o h a 60 : Určete, jakou silou působí na kolejnici následkem rotace Země vlak hmotnosti $m = 5.10^5$ kg, jedoucí rychlostí 72 km.h^{-1} po poledníku od severu k jihu na severní polokouli v místě zeměpisné šířky φ .



Řešení: Vlak se pohybuje v soustavě, která se otáčí úhlovou rychlostí, která se rovná úhlové rychlosti rotace Země.

Síla, kterou vlak působí na kolejnici, je Coriolisova síla

$$\vec{F}_c^* = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} ,$$

kde $\vec{v}'$ je vektor rychlosti pohybu vzhledem k otáčivé soustavě. Působí tedy tato síla pro zadaný pohyb vlaku na pravou kolejnici a její velikost je rovna:

$$F_c^* = 2mv'\omega \sin\alpha = 2mv'\omega\sin(\pi - \varphi) =$$
$$= 2mv'\omega\sin\varphi = 2mv'\frac{2\pi}{T}\sin\varphi ,$$

kde T je perioda rotace Země.

Dosazením $v' = 72$ km.h^{-1} = 20 m.s^{-1}, $T = 24.3600$ s dostáváme

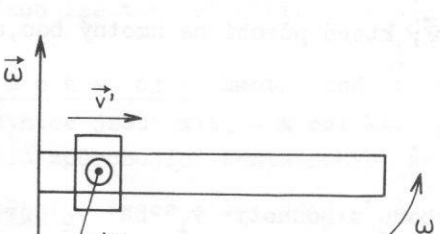
$$F_c^* = 1450 \sin\varphi \ [N].$$

Je tedy F_c^* maximální na pólu, na rovníku je $F_c^* = 0$.

Ú l o h a 61 : Vodorovná tyč koná otáčivý pohyb kolem svislé osy procházející jedním jejím koncem. Po tyči se zároveň posouvá směrem od osy rotace závaží hmotnosti $m = 1{,}6$ kg konstantní rychlostí $v' = 25$ cm.s^{-1}.
Vypočtěte frekvenci otáčení, jestliže závaží působí na vodicí tyč postranní silou 15 N.

Řešení: Postranní síla působí doprava (při pohledu ve směru pohybu závaží) a vyjadřuje Coriolisovu sílu:

$$\vec{F}_c^* = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} .$$



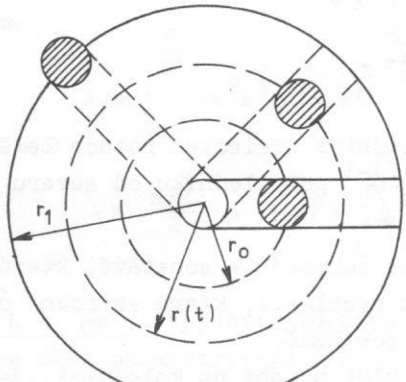
V tomto případě jsou vektory $\vec{v}'$, $\vec{\omega}$ stále na sebe kolmé, proto velikost síly je

$$F_c^* = 2mv'\omega = 2mv'2\pi f ;$$

odtud

$$f = \frac{F_c^*}{4mv'\pi} = 2{,}98 \ s^{-1} .$$

Ú l o h a 62 : Vodorovný kruhový kotouč poloměru $r_1 = 1{,}3$ m rotuje kolem svislé osy s konstantní úhlovou rychlostí $\omega = 8 \ s^{-1}$. V radiálním žlábku na kotouči je ve vzdálenosti $r_o = 0{,}5$ m od osy koule o hmotnosti $m = 0{,}25$ kg.



Určete: a) Závislost vzdálenosti r koule od středu kotouče na čase t,

b) závislost relativní rychlosti v' koule na vzdálenosti od středu kotouče,

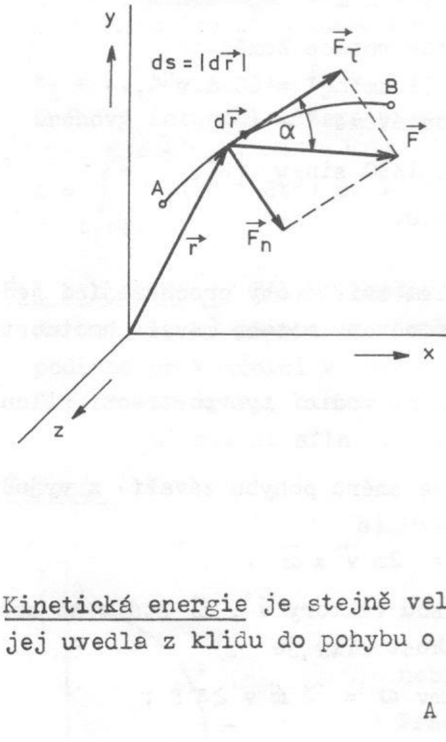
c) velikost Coriolisovy síly působící na kouli na obvodě kotouče.

$$\left[\begin{array}{l} r(t) = r_o \cosh \omega t \\ v'(r) = \omega\sqrt{r^2 - r_o^2} \\ F_c^*(r_1) = 2m\omega v'\, r_1 = \\ = 2\, m\,\omega^2\sqrt{r_1^2 - r_o^2} = 38{,}4\ [N] \end{array}\right]$$

1.4. Práce a energie

Práce síly $\vec{F}$ po dráze mezi body A, B je dána

$$A = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B F\, ds \cos\varphi .$$



Jednotkou práce je joule: $[A] = J = N.m = kg.m^2.s^{-2}$.

Protože $F\cos\varphi = F_\tau$, je práce síly $\vec{F}$ rovna práci její tečné složky $\vec{F}_\tau$:

$$A = \int_A^B \vec{F}_\tau\, d\vec{r} = \int_A^B F_\tau\, ds .$$

Práce normálové složky $\vec{F}_n$ je rovna nule, jelikož vektory $\vec{F}_n$ a $d\vec{r}$ jsou vzájemně kolmé.

Kinetická energie je rovna práci, kterou vykoná setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{a}$ hmotného bodu m, přejde-li z pohybu o rychlosti v do klidu:

$$W_k = \int_v^0 \vec{F}_s\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv^2 \qquad [W_k] = J.$$

Kinetická energie je stejně veliká jako práce síly $\vec{F}$, která působí na hmotný bod, aby jej uvedla z klidu do pohybu o rychlosti v:

$$A = \int_0^v \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv^2 .$$

Práce síly, která způsobí změnu rychlosti hmotného bodu z hodnoty v_1 na v_2 je rovna přírůstku kinetické energie:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W_{k2} - W_{k1} .$$

Je-li $v_2 > v_1 \Rightarrow A > 0$, tzn. že při zrychlování pohybu koná práci síla působící na hmotný bod a kinetická energie se zvyšuje. Je-li $v_2 < v_1 \Rightarrow A < 0$, tzn. že při zpožďování pohybu koná kladnou práci setrvačná síla hmotného bodu a kinetická energie se zmenšuje.