$$F_c^* = 2mv'\omega\sin(2\pi - \varphi) = 2mv'\omega\sin\varphi =$$

$$= 2mv'\frac{2\pi}{T}\sin\varphi = 1450\sin\varphi\ \text{N},$$

kde φ značí zeměpisnou šířku. Je tedy na rovníku (tj. $\varphi = 0$) Coriolisova síla $F_c^* = 0$ a na pólu (tj. $\varphi = 90^o$) je maximální, tj. $F_c^* = 1450$ N.

Coriolisova síla má vliv na podemílání jednoho z břehů řek, směr rotace cyklon a anticyklon, směr víru ve výlevce, existenci magnetického pole Země a pod.

Pozor!

V dalších částech skripta budeme pohyb hmotných bodů, těles a kontinua vztahovat k soustavám

I N E R C I Á L N Í M !

2.4 Práce a energie

2.4.1 Práce síly, energie

Působí-li na hmotný bod síla $\boldsymbol{F}$, je elementární práce dA této síly po elementární trajektorii d$\boldsymbol{r}$ definována vztahem

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{2.4.1}$$

Práce A, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$ po trajektorii mezi body K a L (obr. 2.4.1), je dráhovým integrálem síly po trajektorii C_{KL}

$$A = \int_{C_{KL}} \boldsymbol{F}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_{KL}} F\ \cos\alpha\ \mathrm{d}s\,. \tag{2.4.2}$$

Práce je skalár.

Jednotkou je $[A] = \text{N m} = \text{kg m}^2\ \text{s}^{-2} = \text{J}$ (joule).

Jelikož $F\cos\alpha = F_\tau$, je práce síly $\boldsymbol{F}$ rovna práci tečné složky síly

$$A = \int_{C_{KL}} \boldsymbol{F}_\tau\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_{KL}} F_\tau\,\mathrm{d}s\,. \tag{2.4.3}$$

Práce normálové složky $\boldsymbol{F}_n$ je nulová

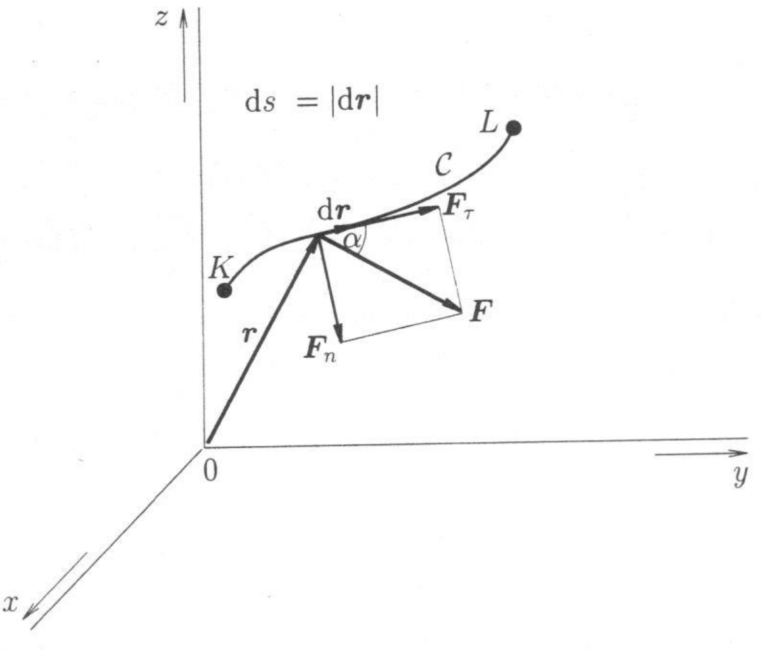
$$A = \int_{C_{KL}} \boldsymbol{F}_n\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0\,.$$

neboť vektory $\boldsymbol{F}_n$ a d$\boldsymbol{r}$ jsou vzájemně kolmé.

Nyní můžeme zavést novou veličinu, označíme ji W, která charakterizuje stav soustavy tím, že její úbytek se projeví prací A vykonanou vnitřními silami soustavy a její přírůstek je způsoben prací vnějších sil A', působících na soustavu. Platí tedy

$$-\Delta W = A, \quad \Delta W = A', \quad A' = -A\,.$$

Veličina W se nazývá **mechanická energie**.



Obrázek 2.4.1

V následujících třech kapitolách podrobněji prozkoumáme dvě formy energie, s nimiž se setkáme při studiu mechanických dějů. Projevuje-li se práce síly pouze změnou rychlosti tělesa, jde o **energii kinetickou**, projeví-li se pouze změnou polohy tělesa v silovém poli (natahování nebo stlačování pružiny, zvedání tělesa v zemském tíhovém poli, změna polohy náboje v elektrickém poli atd. ...), jde o **energii potenciální**.

Jednotka energie je táž jako jednotka práce $[W] = [A] = \mathrm{J}$ (joule).

2.4.2 Kinetická energie

Předpokládejme, že se hmotný bod pohybuje po trajektorii $\mathcal{C}$, která leží ve vodorovné rovině. Působí-li na hmotný bod síla $\boldsymbol{F}$, jejíž tečná složka $\boldsymbol{F}_\tau$ je souhlasně orientovaná s okamžitou rychlostí $\boldsymbol{v}$, uděluje mu podle (2.1.28) tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_\tau$, taže se zvyšuje velikost rychlosti pohybu hmotného bodu. Velikost tečné složky působící síly pak je podle (2.1.28) a (2.2.1)

$$F_\tau = m\,a_\tau = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Dosadíme-li toto vyjádření do (2.4.3), můžeme vypočítat práci $A_{1,2}$, kterou vykoná tečná složka síly F_τ působením po části trajektorie $\mathcal{C}_{1,2}$, jestliže v průběhu tohoto děje vzroste velikost rychlosti z hodnoty v_1 na v_2:

$$A_{1,2} = \int\limits_{\mathcal{C}_{1,2}} F_\tau\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathcal{C}_{1,2}} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = \int\limits_{v_1}^{v_2} m\,v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 = W_{k2} - W_{k1}\,, \qquad (2.4.4)$$

kde jsme označili

$$W_{k1} = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2\,,\ W_{k2} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2\,.$$

Je-li počáteční rychlost nulová a označíme-li velikost výsledné rychlosti v, dostaneme podle (2.4.4) známé vyjádření **kinetické energie** hmotného bodu

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 . \tag{2.4.5}$$

Je zřejmé, že kinetická energie hmotného bodu W_k nezávisí ani na době trvání urychlovacího procesu, ani na tvaru a délce trajektorie $\mathcal{C}_{o,v}$, na níž bylo dosaženo rychlosti $\boldsymbol{v}$, nýbrž pouze na velikosti rychlosti $|\boldsymbol{v}| = v$. Vyjadřuje pohybový stav hmotného bodu při rychlosti v, náleží tedy do kategorie *stavových veličin.*

Je zřejmé, že jednotkou kinetické energie je $[W_k] = [A] = \mathrm{J}$.

Práce $A_{1,2}$, kterou vykoná tečná složka vnější síly F_τ tím, že působením po trajektorii $\mathcal{C}_{1,2}$ způsobí vzrůst velikosti rychlosti z hodnoty v_1 na hodnotu v_2, se tedy spotřebuje na přírůstek kinetické energie

$$A_{1,2} = W_{k2} - W_{k1} .$$

Předpokládejme nyní, že se hmotný bod pohybuje rychlostí v_2 a vypočítejme práci $A_{i,2,1}$, kterou by vykonala tečná složka jeho setrvačné síly $F_{i\tau} = -ma_\tau$ působením po trajektorii $\mathcal{C}_{2,1}$, kdyby v průběhu tohoto děje klesla velikost rychlosti z hodnoty v_2 zpět na v_1:

$$A_{i,2,1} = \int\limits_{\mathcal{C}_{2,1}} F_{i\tau}\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{\mathcal{C}_{2,1}} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = -\int\limits_{v_2}^{v_1} m\,v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2 = W_{k2} - W_{k1} . \tag{2.4.6}$$

Je zřejmé, že se tato práce koná na účet kinetické energie a je rovna práci $A_{1,2}$, kterou vykonala vnější síla tím, že zvýšila velikost rychlosti z hodnoty v_1 na hodnotu v_2

$$A_{i,2,1} = W_{k2} - W_{k1} = A_{1,2} .$$

Kinetickou energii hmotného bodu W_k můžeme tedy definovat jako práci, kterou je schopna vykonat jeho setrvačné síla, převede-li pohyb o rychlosti velikosti v do klidu.

Z předchozích úvah vyplývá, že při zrychlování pohybu koná práci vnější síla působící na hmotný bod - kinetická energie se zvyšuje. Při zpomalování pohybu koná práci síla setrvačnosti hmotného bodu - kinetická energie se zmenšuje.

2.4.3 Potenciální energie v homogenním tíhovém poli

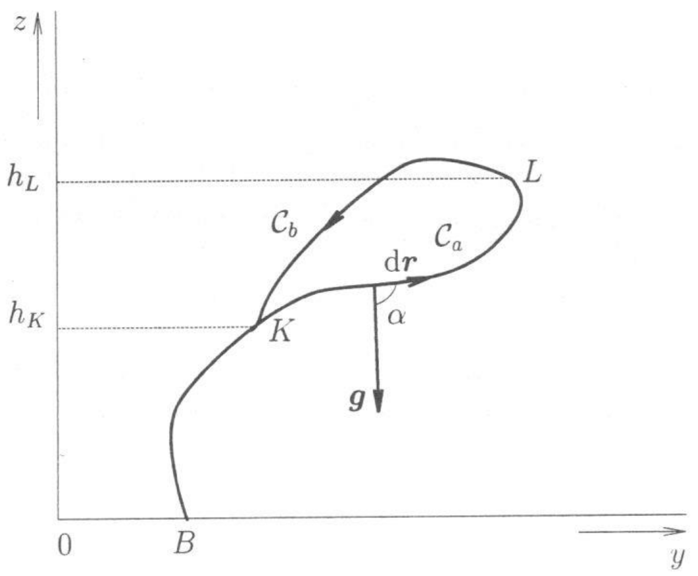
Vypočtěme práci, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$ působící v homogenním tíhovém poli proti tíhové síle $\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{G})$, posunutím hmotného bodu z bodu K do bodu L po křivce $\int\limits_{\mathcal{C}_{KL}}$ (obr. 2.4.2)

$$A = \int\limits_{\mathcal{C}_{KL}} \boldsymbol{F}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int\limits_{\mathcal{C}_{KL}} \boldsymbol{G}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int\limits_{\mathcal{C}_{KL}} m\boldsymbol{g}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\limits_{\mathcal{C}_{KL}} mg\,.\,\mathrm{d}h = mg(h_L - h_K) , \tag{2.4.7}$$

kde

$$\boldsymbol{g}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = g\ \mathrm{d}s\cos\alpha = -g\ \mathrm{d}h . \tag{2.4.8}$$

Práce tedy závisí pouze na vzdálenosti horizontálních rovin bodů K a L a nezávisí na tvaru trajektorie mezi body K a L. Práce po jakékoliv jiné trajektorii z bodu K do bodu L bude stejná. Vypočteme práci, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$ z předchozí úvahy po uzavřené trajektorii, kdy se hmotný bod po posunutí vrátí zpět do výchozí polohy. Nechť síla $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{G}$ koná práci na



Obrázek 2.4.2

posunutí hmotného bodu z bodu K do bodu L po trajektorii $\mathcal{C}_a$ a po libovolné trajektorii $\mathcal{C}_b$ zpět do bodu K. Tato práce je podle (2.4.7)

$$A = mg(h_K - h_K) = 0\,, \tag{2.4.9}$$

tedy nulová.

Práce, vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ na přenesení hmotného bodu v homogenním tíhovém poli po uzavřené trajektorii, je nulová. Nezmění se ani stav tělesa, ani stav okolí. Síly s touto vlastností se nazývají **konzervativní**. Později poznáme, že mezi konzervativní síly patří kromě síly tíhové také síly pružnosti, elektrostatické síly, tlakové síly v tekutinách apod. Pro konzervativní sílu $\boldsymbol{F}$ můžeme definovat potenciální energii W_p obecně jako práci, kterou vykoná síla $-\boldsymbol{F}$, působící proti konzervativní síle, po trajektorii ze vztažného bodu B s nulovou potenicální energií, do bodu, v němž potenciální energii určujeme

$$W_p = -\int\limits_{\mathcal{C}_{BK}} \boldsymbol{F}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{2.4.10}$$

Potenciální energie W_p v homogenním tíhovém poli je rovna práci, kterou vykoná síla působící proti tíhové síle $\boldsymbol{G}$, přenese-li hmotný bod ze vztažného (referenčního) bodu B do bodu K (obr. 2.4.2). Je tedy podle (2.4.7) a (2.4.8)

$$W_p = -\int\limits_{\mathcal{C}_{BK}} \boldsymbol{G}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = mg(h_K - h_B)\,. \tag{2.4.11}$$

Tíhová síla má svislý směr. Práce vykonaná při přemístění hmotného bodu ve vodorovné rovině je tedy nulová. Potenciální energie je ve všech bodech vodorovné plochy stejná. Roli vztažného bodu hraje horizontální rovina, v níž volíme $W_p = 0$.

Vztažnou rovinu spojujeme zpravidla se zemským povrchem, kde je $h = 0$. Potom je potenciální energie homogenního tíhového pole

$$W_p = m\,g\,h\,. \tag{2.4.12}$$

Pozor: *Uvědomme si, že potenciální energie homogenního tíhového pole je pouze jedním z možných druhů potenciální energie. Jiné druhy potenciální energie jsou např. potenciální* *energie pružnosti, nehomogenního gravitačního pole, elektrostatického pole. Jejich hodnota není dána výrazem mgh.*

Potenciální energie těchto polí je dána prací, kterou musí vykonat vnější síla působící proti vnitřní síle, přenese-li v daném potenciálovém poli hmotný bod z referenční polohy do polohy, v níž potenciální energii chceme stanovit.

Připomeňme, že jednotkou potenciální i kinetické energie je 1 J (joule).

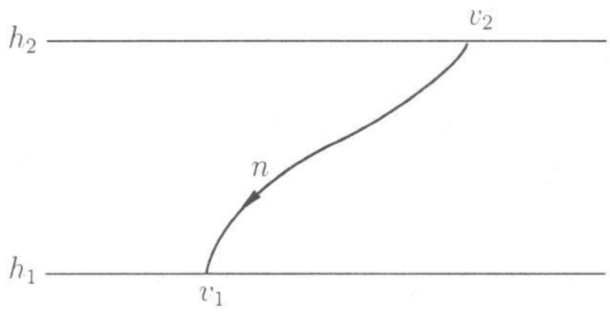
2.4.4 Zákon zachování mechanické energie v homogenním tíhovém poli

Zkoumejme změny kinetické energie v homogenním tíhovém poli v souvislosti se změnami energie potenciální. Uvažujme hmotný bod pohybující se po trajektorii n z vyšší hladiny h_2 na nižší hladinu h_1 (obr. 2.4.3). Ve vodorovné hladině h_1 má hmotný bod rychlost v_1 a ve vodorovné hladině h_2 rychlost v_2. Změna kinetické energie

$$\Delta W_{k_{12}} = W_{k_1} - W_{k_2} == \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = A \tag{2.4.13}$$

představuje podle rovnice (2.4.4) práci A, vykonanou tíhovou silou tělesa. Experimenty potvrzují, že pokud lze všechny ostatní formy energie zanedbat, je tato práce rovna změně potenciální energie $\Delta W_{p_{21}}$

$$A = W_{p_2} - W_{p_1} == \Delta W_{p_{21}} \, . \tag{2.4.14}$$



Obrázek 2.4.3

Potom ze spojení (2.4.13) a (2.4.14) plyne

$$W_{k_1} + W_{p_1} = W_{k_2} + W_{p_2} = konst. \tag{2.4.15}$$

a obecně

$$W_k + W_p = konst.$$

Tento vztah je matematickým vyjádřením zákona zachování mechanické energie: **součet kinetické a potenciální energie se při pohybu v homogenním tíhovém poli nemění.** Platí pouze v případě, kdy lze všechny ostatní formy energie zanedbat.

Je zřejmé, že součet změn kinetické a potenciální energie je nulový

$$\Delta W_k + \Delta W_p = 0 \, . \tag{2.4.16}$$

Zákon zachování mechanické energie je speciálním případem zákona zachování energie: **při přeměně jedné formy pohybu v jinou se celková kvantita, charakterizovaná energií, nemění**. Zákon zachování energie je jedním z nejobecnějších fyzikálních zákonů a souvisí s homogenitou času.

V následující úvaze ověříme platnost zákona zachování mechanické energie pro volný pád v homogenním gravitačním poli.

Nejdříve vyjádříme kinetickou a potenciální energii hmotného bodu padajícího s počáteční nulovou rychlostí z výšky h pro libovolnou výšku $y < h$ nad referenční hladinou

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(gt)^2\,, \qquad W_p = mgy\,.$$

Vyjádříme-li dráhu volného pádu $(h - y)$ ve tvaru

$$(h - y) = \frac{1}{2}gt^2\,, \quad \textit{dostaneme} \quad W_k = (h - y)mg\,.$$

Celková energie je dána součtem

$$W = W_k + W_p = mg(h - y) + mgy = mgh\,.$$

Vidíme, že celková mechanická energie hmotného bodu padajícího volným pádem v homogenním gravitačním poli z výšky h je v libovolné výšce $y < h$ nezávislá na okamžité výšce a má konstantní hodnotu

$$W = m\,g\,h\,.$$

2.4.5 Výkon

K posouzení práce síly $\boldsymbol{F}$ s ohledem na čas potřebný k jejímu vykonání definujme výkon

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.4.17}$$

Jednotkou výkonu je watt (značka W)

$$[P] = \mathrm{W} = \mathrm{J\ s^{-1}} = \mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}}\,.$$

Práci v časovém intervalu (t_1, t_2) vyjádříme podle (2.4.17) integrálem

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.4.18}$$

Odtud pak plynou některé jednotky práce, používané v energetice:
wattsekunda .... $1\ \mathrm{W\ s} = 1\mathrm{J}$,
watthodina .... $1\ \mathrm{W\ h} = 3600\ \mathrm{J} = 3{,}6\ \mathrm{kJ}$,
kilowatthodina ...... $1\ \mathrm{kW\ h} = 3\,600\,000\ \mathrm{J} = 3{,}6\ \mathrm{MJ}$.

Vyjádříme-li ve vztahu (2.4.17) elementární práci podle definičního vztahu (2.4.1), je možné po malé úpravě

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} \tag{2.4.19}$$

vyjádřit výkon jako skalární součin síly působící na hmotný bod a rychlosti tohoto hmotného bodu.