4 KMITY A VLNY

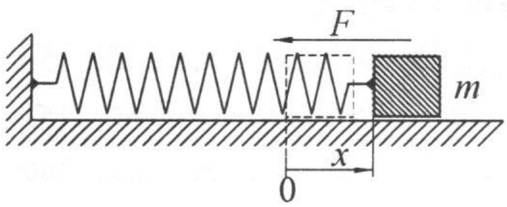
Kmitavé pohyby (kupř. časové závislosti polohy částic, časové změny proudů v elektrických obvodech, proměny hodnot vektorů v elektromagnetických polích ap.) a vlnivé děje (v nichž se kmitavé pohyby ve spojitých prostředích šíří a v různých místech spolu souvisejí), které tvoří náplň této rozsáhlé kapitoly, zdánlivě představují jen velmi úzkou a speciální část fyzikálních procesů. Ve skutečnosti jsou to **děje velice rozšířené**, s mnoha technickými aplikacemi i teoretickými souvislostmi. Vyskytují se všude tam, kde je systém nevelkým vnějším vlivem vychýlen z původně stabilního rovnovážného stavu a systém pak začíná kolem rovnováhy oscilovat.

4.1 Kmity

4.1.1 Lineární harmonický oscilátor

Sledujme nejprve několik konkrétních příkladů:

Těleso upevněné na pružině



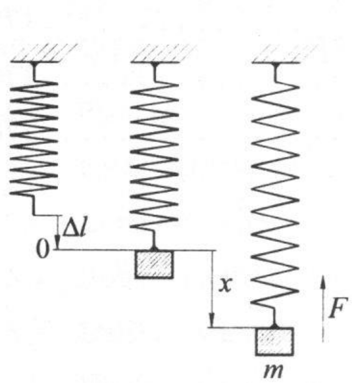
Obr. 4.1.1

Mějme těleso (hmotný bod) s hmotností m spojené s pružinou tak, že se může pohybovat bez tření podél vodorovného směru podle obr. 4.1.1. Je-li vychýleno ze své rovnovážné polohy O o posunutí x (přičemž x je dostatečně malé tak, aby platil Hookův zákon), vzniká v důsledku pružné síly pružiny síla F o velikosti přímo úměrné velikosti výchylky x. Směr této síly působící na těleso je však opačný než směr posunutí x, takže můžeme napsat

$$\boxed{F = -k\,x}\,, \tag{4.1.1}$$

kde $k > 0$ je tzv. tuhost pružiny. Po dosazení do Newtonova druhého zákona $F = ma$, v němž zrychlení a je druhou derivací výchylky x podle času, $a = \ddot{x}$, a po vydělení rovnice hmotností m, dostáváme pohybovou diferenciální rovnici

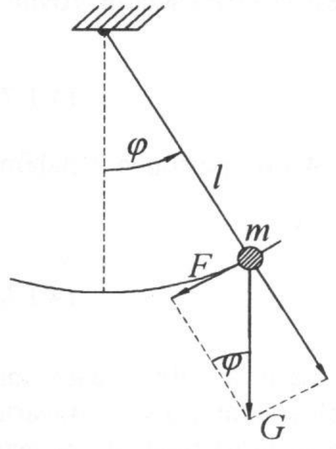
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{4.1.2}$$



Obr. 4.1.2

V případě svislého uspořádání podle obr. 4.1.2 je situace shodná s předchozím případem, jen s tím rozdílem, že posunutí x bereme od rovnovážné polohy soustavy, tj. od klidové polohy tělesa, které po zavěšení na pružinu svoji vahou její délku o něco prodlouží (o $\Delta l = mg/k$). I zde však v oboru platnosti Hookova zákona můžeme psát $F = -kx$.

Matematické kyvadlo



Obr. 4.1.3.

Na hmotný bod s hmotností m zavěšený na nehmotném závěsu délky l při výchylce φ působí tíhová síla $G = mg$ tak, že pro její složku tečnou k oblouku kružnice, po níž se bod m může pohybovat, platí

$$F = -m\,g \sin\varphi \ .$$

Znaménko minus vyjadřuje skutečnost, že směr síly F je vždy právě opačný, než odpovídá znaménku výchylky φ, obr. 4.1.3. Pro tečné zrychlení bodu m můžeme napsat $a = l\ddot{\varphi}$, takže z druhého Newtonova zákona:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \ ,$$

dostáváme okamžitě pohybovou diferenciální rovnici pro nalezení $\varphi(t)$,

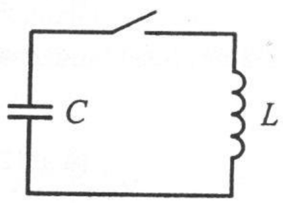
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \ . \qquad (4.1.3)$$

Je-li úhel φ dostatečně malý, abychom mohli položit $\sin\varphi \doteq \varphi$, dostáváme rovnici tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \ . \qquad (4.1.4)$$

(Pozn.: Pro $\varphi \leq 5°$ v rozvoji $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \frac{1}{7!}\varphi^7 + \ldots$ první člen převyšuje ostatní členy nejméně tisíckrát, takže lineární přiblížení je dostatečně přesné.)

LC obvod



Obr. 4.1.4.

V ideálním LC obvodu (obr. 4.1.4) podle druhého Kirchhoffova zákona pro bilanci napětí platí

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t I\,\mathrm{d}\tau = 0 \ . \qquad (4.1.5)$$

Po zderivování podle času t a po vydělení indukčností L dostáváme pohybovou rovnici pro obvod

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0 \ . \qquad (4.1.6)$$

Netlumený lineární harmonický oscilátor

Všechny uvedené příklady, ačkoliv jsou vybrány z různých oblastí fyziky, mají řadu společných rysů. Především popisují systémy, u kterých existuje rovnovážný stav. Je-li systém z tohoto stavu vyveden, vzniká v něm síla, která je úměrná velikosti výchylky od rovnovážného stavu a která působí tak, aby se systém do rovnovážného stavu vrátil. Systém sám i vzniklé síly mohou být velmi rozmanité povahy (elastické síly u pružiny, gravitační síla u kyvadla, indukované elektromotorické napětí v LC obvodu ap.).

Podstatné je, že všechny uvedené příklady (a celá řada dalších, kupř. torzní kmity, kmity molekul, kmity v plazmatu atd.) vedou ke stejnému tvaru pohybové diferenciální rovnice (4.1.2), (4.1.4), (4.1.6), která z matematického hlediska je lineární diferenciální rovnicí 2. řádu s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou tvaru

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}\,. \tag{4.1.7}$$

Kladný koeficient ω_0^2, odpovídá v rovnicích (4.1.2), (4.1.4) a (4.1.6) postupně vztahům pro ω_0:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}\,,\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}\ \text{a}\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}\,. \tag{4.1.8}$$

Stejný tvar pohybové rovnice vede ovšem ke stejnému tvaru řešení a tedy i časovému chování ve všech uvedených případech. To umožňuje zavést abstraktní pojem „lineární harmonický oscilátor". Jeho chování je popsáno rovnicí (4.1.7) nezávisle na fyzikální povaze systému. Veličina u představuje „výchylku" systému od rovnovážného stavu. Všechny další úvahy budou mít obecnou povahu, ale pro konkrétní představu můžeme mít zpravidla na mysli oscilační pohyby hmotného bodu a výchylku u můžeme chápat jako posunutí x z prvého příkladu.

Řešení pohybové rovnice – harmonické kmity

Z matematiky víme, že při hledání obecného řešení rovnice tvaru (4.1.7) napíšeme nejprve tzv. charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + {\omega_0}^2 = 0 \tag{4.1.9}$$

s kořeny:

$$\lambda_{12} = \pm \mathrm{j}\omega_0\,. \tag{4.1.10}$$

Obecné komplexní řešení pak může být zapsáno jako lineární superpozice ve tvaru

$$u = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\,. \tag{4.1.11}$$

Z Eulerových vztahů $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + \mathrm{j}\sin\omega_0 t$ lze ukázat, že obecné (reálné) řešení můžeme napsat i ve tvaru

$$\boxed{u = C_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}\,, \tag{4.1.12}$$

případně $u = C_0 \cos(\omega_0 t + \psi)$, což je ale jen jiná podoba tvaru (4.1.12).

Jiným vhodným tvarem je i reálná superpozice:

$$u = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\,. \tag{4.1.13}$$

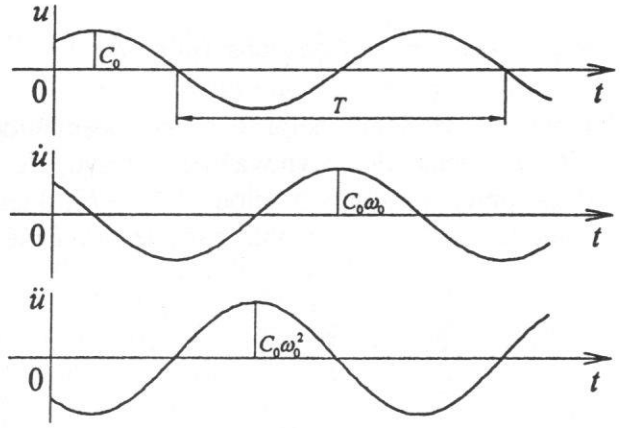
Neurčené dvě integrační konstanty C_1 a C_2 nebo C_0 a φ (případně ψ) nebo konečně A a B musí být nalezeny teprve z tzv. počátečních podmínek kladených na konkrétní řešení podle povahy úlohy.

Všechny tři tvary řešení (4.1.11), (4.1.12) a (4.1.13) jsou ekvivalentní a budeme je užívat podle vhodnosti v dané formulaci problému. Obr. 4.1.5 vychází z tvaru (4.1.12) a zobrazuje průběh výchylky $u(t)$, rychlosti $v = \dot{u}(t)$ a zrychlení $a = \ddot{u}(t)$. Derivováním (4.1.12) snadno získáme

$$v = C_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{4.1.14}$$

a

$$a = -C_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 u \quad . \tag{4.1.15}$$



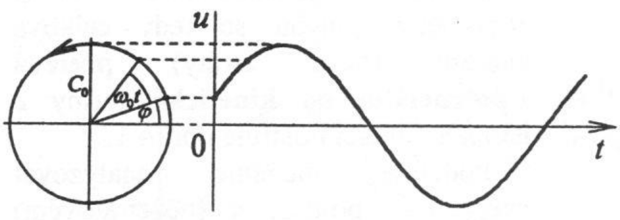
Obr. 4.1.5.

Zde C_0, odpovídající maximální výchylce, se nazývá **amplituda**, argument goniometrické funkce $\omega_0 t + \varphi$ je tzv. **fáze**, konstanta φ je tzv. **fázová konstanta**, ω_0 je **úhlová frekvence**, $f = \omega_0 / 2\pi$ je **kmitočet** (frekvence) a $T = 1/f = 2\pi/\omega_0$ je **perioda** kmitů. (Pozn. Nehrozí-li nebezpečí nedorozumění, je obvyklé, ač jistě ne zcela patřičné, i o úhlové frekvenci prostě mluvit jako o frekvenci ω.)

Chceme-li specifikovat konkrétní řešení pohybové rovnice, je třeba udat **počáteční podmínky** v čase nula, výchylku $u(0) = u_0$ a rychlost $v(0) = v_0$. Z rovnic

$$u_0 = C_0 \sin\varphi \quad \text{a} \quad v_0 = \omega_0 C_0 \cos\varphi \tag{4.1.16}$$

můžeme pak určit obě integrační konstanty C_0 a φ. Tyto hodnoty můžeme určit ale i z jiných dvou nezávislých podmínek kladených na hledané řešení, kupř. z výchylek ve dvou časových okamžicích t_1 a t_2, nebo ze dvou hodnot rychlosti, případně z výchylky v čase t_1 a rychlosti v čase t_2 (pro $t_1 = t_2$ máme případ počátečních podmínek). Jde o to, aby podmínky vedly na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, mající jediné řešení.



Obr. 4.1.6.

Terminologie užívaná pro popis harmonického pohybu je úzce spjata se skutečností, že harmonický pohyb může být chápán i jako projekce rovnoměrného kmitavého pohybu podle obr. 4.1.6.

S touto možností úzce souvisí i výhodné použití **komplexního zápisu** řešení

$$\hat{u} = C_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = C_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + jC_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad . \tag{4.1.17}$$

Výchylka u pak odpovídá ryze imaginární části komplexního řešení. (Lze ovšem stejně dobře použít i části reálné.) Použití komplexních vyjádření (komplexních vektorů) je zvláště vhodné a je hojně používáno v řadě elektrotechnických aplikací.

Bilance energie

Stabilní rovnovážná poloha mechanické soustavy je charakterizována (lokální) minimální hodnotou potenciální energie. K vychýlení soustavy z tohoto stavu je třeba zvnějšku nějakou energii dodat. Ta je při návratu soustavy k rovnovážné poloze konvertována do energie pohybové a pokud nedochází k úbytku energie, **celková energie zůstává konstantní**. Doložme tuto situaci na případě tělesa spojeného s pružinou.

Pro kinetickou energii s uvážením rychlosti podle (4.1.14) okamžitě máme

$$W_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mC_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ . \tag{4.1.18}$$

Při výpočtu potenciální energie vyjděme nejprve z její obecné definice. Je-li nulová hodnota potenciální energie položena do rovnovážného stavu, je potenciální energie odpovídající výchylce u dána prací vykonanou silou $F^* = -F$, která překonává vnitřní pružnou sílu soustavy $F = -ku$ tak, aby těleso mohlo být z rovnovážného polohy vyvedeno. Platí

$$W_p = -\int_0^u F\mathrm{d}u' = \int_0^u ku'\mathrm{d}u' = \frac{1}{2}ku^2\ . \tag{4.1.19}$$

Průběh závislosti W_p na výchylce u je parabolický s minimem v rovnovážné poloze $u = 0$. Po dosazení za u ze (4.1.12) máme

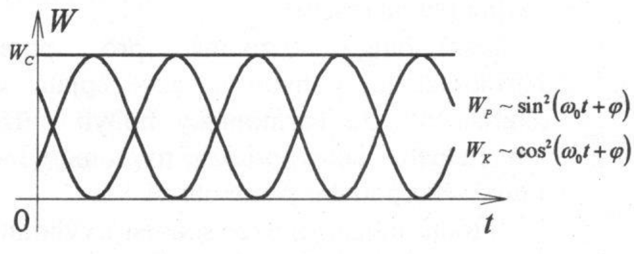
$$W_p = \frac{1}{2}kC_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ . \tag{4.1.20}$$

Součet $W_k + W_p = W_c$ je ovšem roven celkové energii a zůstává v čase konstantní. To snadno ověříme, dosadíme-li ze (4.1.18) a (4.1.20) a uvážíme, že $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ a že podle (4.1.8) platí $m\omega_0^2 = k$. Dostaneme:

$$W_c = W_k + W_p = \frac{1}{2}mC_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kC_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2C_0^2 = \frac{1}{2}kC_0^2\ . \tag{4.1.21}$$

Celková energie je tak rovna maximální hodnotě potenciální energie v okamžiku maximální výchylky, kdy $u = C_0$ a $v = 0$, nebo maximální možné hodnotě kinetické energie, kdy $u = 0$ a rychlost je maximální, $v = \omega_0 C_0$. V průběhu pohybu se tedy celková energie (beze ztráty) **přelévá z potenciální do kinetické** formy a naopak. Situaci ilustruje obr. 4.1.7.



Obr. 4.1.7.

Podobně můžeme analyzovat energetické poměry v (bezztrátovém) obvodu LC. Energie magnetická W_m je dána vztahem (3.4.46) z Fyziky I

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)\ . \tag{4.1.22}$$

Pro energii elektrického pole v kondenzátoru platí (3.2.66),

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{C\omega_0^2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)\ , \tag{4.1.23}$$

kde

$$Q = \int_0^t I_0 \sin(\omega_0 t' + \varphi)\mathrm{d}t' = -\frac{I_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

Uvážíme-li, že podle (4.1.8) $\omega_0^2 = 1/LC$ a že $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, uvidíme, že **energie elektrická se přelévá do energie magnetické**, avšak součet obou komponent, tedy energie **celková, se v čase zachovává**.

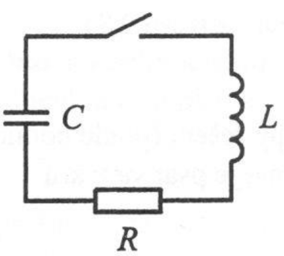
Anharmonické kmity

Dříve než ukončíme paragraf o netlumeném harmonickém kmitání, alespoň krátce se zmíníme o obecnějším případu kmitavých pohybů, které nejsou harmonické. Potenciální energie v okolí svého minima (a tedy v okolí rovnovážné polohy) nemusí mít průběh tvaru paraboly (4.1.19) a pro působící sílu neplatí vztah přímé úměrnosti $F = -ku$. Takováto závislost je jen prvním (lineárním) přiblížením v těsném sousedství rovnováhy. Pro kmity s větší amplitudou tedy nestačí diferenciální rovnice tvaru (4.1.7). Řešení pak nemají harmonický (sinový či kosinový) průběh. Pro řešení nelineární rovnice **neplatí princip superpozice** (součet dvou řešení nemusí být řešením) a celá situace je složitější a obtížnější, ale i bohatší ve svých podobách. Nelineární rovnicí je kupř. i úplná rovnice pro pohyb matematického **kyvadla** s neomezenou amplitudou (4.1.3). Důležitým případem anharmonických kmitů je např. kmitání atomů v krystalové mříži pevného tělesa. S touto skutečností souvisí i jev teplotní roztažnosti pevných látek. Viz paragraf 6.16 a rovnici (6.16.1).

4.1.2 Tlumené kmity

Ztráty a tlumení

V předcházejícím výkladu jsme při analýze kmitání zanedbávali energetické ztráty. V reálných systémech jsou však **ztráty nevyhnutelné** a v praxi ne úplně odstranitelné (tření, vliv ohmického odporu, vyzařování ap.). Makroskopická energie je disipována (rozptylována) a jako teplo či jinak odváděna ze systému. Povaha těchto ztrát může být různá, kupříkladu v elektrických obvodech dochází ke ztrátám ve spojovacích vodičích, v dielektriku kondenzátoru, popřípadě v jádře indukční cívky. Jejich závislost na procházejícím proudu může být dosti složitá. To by v obecném případě značně komplikovalo pohybovou rovnici, činilo by ji nelineární a znemožnilo uplatnění principu superpozice.



Obr. 4.1.8

V dalším výkladu budeme proto uvažovat jen takové síly, které **zachovávají linearitu** pohybové rovnice. I když tento požadavek znamená značné omezení, ukazuje se, že i tak jde o dobré přiblížení, vhodné k popisu mnoha reálných systémů.

V případě LC obvodu to odpovídá zavedení rezistoru R podle obr. 4.1.8. Rovnice (4.1.5) se pak rozšíří na tvar

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt' = 0. \qquad (4.1.24)$$

Místo (4.1.6) poté dostaneme

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0. \qquad (4.1.25)$$

V případě mechanického kmitání zavedení **síly tření úměrné velikosti rychlosti** pohybu a mířící proti směru rychlosti $F_t = -bv$ vede k pohybové rovnici

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \qquad (4.1.26)$$

a místo (4.1.2) pak máme

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (4.1.27)$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

Zavedeme-li v rovnici (4.1.25) označení

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{a} \quad \frac{R}{L} = 2\delta \qquad (4.1.28)$$

a podobně i v rovnici (4.1.27)

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{a} \quad \frac{b}{m} = 2\delta, \qquad (4.1.29)$$

dostáváme společně pro tlumený harmonický oscilátor

$$\boxed{\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}. \qquad (4.1.30)$$

Veličinu δ nazveme **konstantou tlumení** a ω_0 si ponechá původní smysl jako úhlová frekvence, jež by příslušela témuž oscilátoru, kdyby tlumení bylo možno zanedbat a oscilátor byl netlumen.

Rovnice (4.1.30) je z matematického hlediska lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou. Při jejím řešení lze postupovat stejně jako v případě netlumeného kmitání. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

nabízí obecně dva kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta - \omega_0^2}. \qquad (4.1.32)$$

(Nyní je patrné, proč je vhodné volit konstantu u tlumícího členu ve tvaru 2δ.)

Diskuse typů řešení

Tvar diskriminantu v rovnici (4.1.31) připouští tři možné typy řešení (podle hodnot ω a δ):

(a) Pro $\boldsymbol{\delta > \omega_0}$ jsou kořeny (4.1.31) reálné a kladné. Můžeme je psát ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \Delta, \text{ kde } \Delta^2 = \delta^2 - \omega_0^2.$$

(b) Pro $\boldsymbol{\delta = \omega_0}$ dostáváme dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -\delta$.

(c) Pro $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ dostaneme dva komplexně sdružené kořeny ve tvaru $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega$, kde

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (4.1.32)$$

Proberme nejprve **případ (a)**. Obecné řešení rovnice (4.1.30) má opět tvar

$$u = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

a po dosazení λ_1, λ_2 dostáváme

$$u = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \mathrm{e}^{\Delta t} + C_2 \mathrm{e}^{-\Delta t}) . \tag{4.1.33}$$

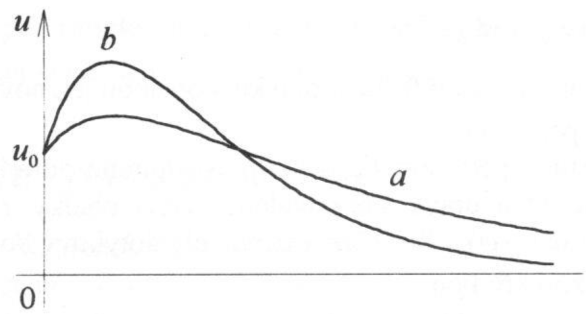
Řešení lze s využitím vlastností hyperbolických funkcí převést na tvar

$$\boxed{u = C_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sinh(\Delta t + \varphi)} \tag{4.1.34}$$

nebo na ekvivalentní tvar s hyperbolickým kosinem, či na lineární kombinaci obou. Na obr. 4.1.9 je znázorněno řešení (a) odpovídající počáteční podmínce $u(0) = u_0 > 0$, $\dot{u}(0) = v_0 > 0$. Pohyb probíhá pouze na jedné straně od rovnovážné polohy a s $t \to \infty$ se výchylka u asymptoticky blíží nule. Při určité volbě integračních konstant C_1, C_2, kdy $C_2 / C_1 < -1$ (tj. při zvláštní volbě počátečních podmínek) může pohyb překmitnout do hodnot opačného znaménka, avšak nejvýše jednou. Pohyb je **aperiodický (přetlumený)**.

Pro **případ (b)** máme dvojnásobný kořen charakteristické rovnice. Teorie diferenciálních rovnic vede pro tuto situaci k obecnému řešení tvaru

$$u = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) .$$



Obr. 4.1.9

Je ihned vidět, že i toto řešení (pokud začíná z nulové výchylky $u_0 = 0$) nemění znaménko a pro $t \to \infty$ se rovněž asymptoticky blíží k nule. Podstatné je, že návrat k rovnovážné poloze se děje "nejrychlejším" možným způsobem, aniž by přitom došlo k překmitnutí. To má řadu technických využití, např. při volbě tlumení u systémů elektrických měřicích přístrojů (hlavně galvanoměrů) a tlumených analytických vah, kde vhodná volba tlumení značně zkracuje dobu potřebnou pro určení měřené veličiny. Tento případ tlumení se nazývá **kritický**. Je znázorněn křivkou (b) v obr. 4.1.9.

Více pozornosti budeme věnovat **případu (c)**.

Tlumené harmonické kmitání

Je-li tlumení malé a platí $\delta < \omega_0$, má obecné řešení rovnice (4.1.30) tvar

$$u = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}) .$$

Stejným postupem jako u netlumeného oscilátoru lze přepsat výraz v závorce a reálné řešení zapsat ve tvaru

$$\boxed{u = C_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)} , \tag{4.1.35}$$

odkud je patrno, že je lze interpretovat jako řešení netlumeného harmonického oscilátoru, jehož amplituda exponenciálně klesá s časem, obr. 4.1.10.

Z matematického hlediska řešení (4.1.35) **není periodické** (nevyhovuje definici periodické funkce $f(t+T)=f(t)$), má však některé periodické vlastnosti, které nyní probereme.

1) **Průchod rovnovážnou polohou** nastává pro $\sin(\omega t + \varphi) = 0$; odtud $\omega t + \varphi = k\pi$, ($k$=0,1,2...). Pro časovou odlehlost dvou následujících průchodů máme $(\omega t_{k+1} + \varphi) - (\omega t_k + \varphi) = [(k+1) - k]\pi$, odkud $\omega(t_{k+1} - t_k) = \pi$, takže

$$(t_{k+1} - t_k) = \frac{T}{2}. \tag{4.1.36}$$

2) Hledejme **časové okamžiky extrémů výchylky**, tj. okamžiky nulových hodnot rychlosti. Zderivujme proto (4.1.35) a položme rovno nule.

$$\dot{u} = C_0 e^{-\delta t}[-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] = 0.$$

Odtud máme $\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = \dfrac{\omega}{\delta}$, a tedy $\omega t + \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\delta} + k\pi$. Označíme-li $\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\delta} - \varphi = \alpha$, máme $\omega t = \alpha + k\pi$ a pro odlehlost sousedních extrémů opět vyplývá

$$t^*_{k+1} - t^*_k = \frac{T}{2}.$$

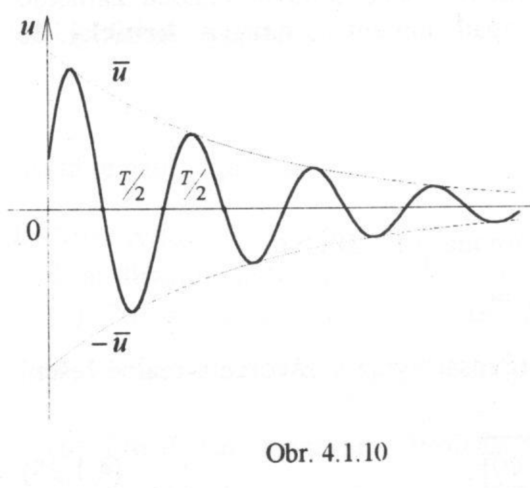
Vzhledem k tomu, že maxima a minima se vzájemně střídají, je vzdálenost dvou sousedních maxim (nebo minim) rovna periodě T.

3) Hledejme časové okamžiky, kdy se funkce u **dotýká** své obálky $\bar{u} = C_0 e^{-\delta t}$. Viz obr. 4.1.11. Pro dotyky platí $u = \pm\bar{u}$, tj.

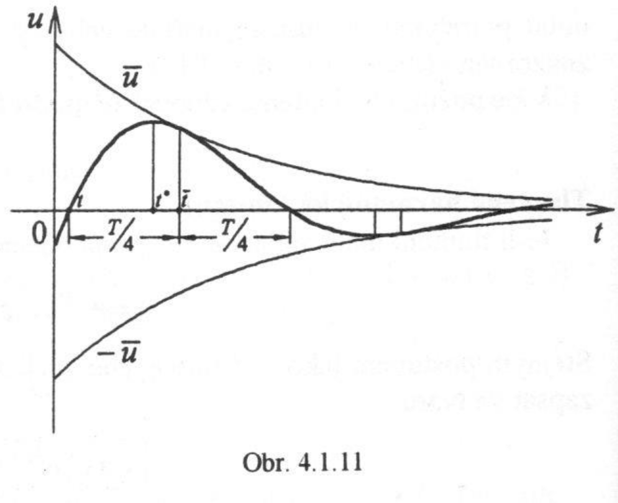
$$C_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = \pm C_0 e^{-\delta t}.$$

To odpovídá extrémům funkce $\sin(\omega t + \varphi) = \pm 1$. Časová odlehlost dotyků s obálkou je znovu $T/2$ a dotyky s jednou větví obálky se opakují s periodou T.

Máme tak tři jevy, které se periodicky opakují s periodou $T/2$ a to v následujícím pořadí: průchod nulovou polohou t, dosažení extrému t^* a dotyk s odpovídající větví obálky $\bar{t}$. Uprostřed mezi dvěma nulovými průchody $[\sin(\omega t + \varphi) = 0]$ neleží extrém, ale dotykový bod $[\sin(\omega t + \varphi) = \pm 1]$. "Půlperioda" není symetrickou křivkou.



Obr. 4.1.10



Obr. 4.1.11

Útlum

Mírou tlumení je poměr velikostí výchylek ve dvou časových okamžicích vzdálených o periodu T

$$\frac{u(t)}{u(t+T)}=\frac{C_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)}{C_0 e^{-\delta(t-T)}\sin[\omega(t+T)+\varphi]}.$$

Postupně upravme

$$\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t-T)}}=e^{\delta T}$$

a

$$\sin[\omega(t+T)+\varphi]=\sin[\omega(t+\varphi)+\omega T]=\sin[\omega(t+\varphi)+2\pi]=\sin(\omega t+\varphi).$$

Nezávisle na volbě t tak dostáváme

$$\frac{u(t)}{u(t+T)}=e^{\delta T}=\beta. \tag{4.1.37}$$

Bezrozměrná veličina β se nazývá **útlum** a její přirozený logaritmus λ,

$$\lambda=\ln\beta=\delta T, \tag{4.1.38}$$

logaritmický dekrement útlumu. Znalost ω a λ (místo ω_0 a δ) plně určuje vlastnosti tlumeného harmonického oscilátoru.

4.1.3 Vynucené kmitání

V předchozích odstavcích jsme se zabývali tzv. volným kmitáním oscilační soustavy. Reálné systémy však vždycky ztrácejí energii a amplituda kmitů nutně klesá k nule. Má-li systém kmitat trvale, je nezbytné dodávat mu energii z vnějšího zdroje. Tu dodává zvnějšku působící síla. Chceme studovat harmonické děje, volme proto sílu ve tvaru

$$F=F_0\sin\Omega t,$$

kde Ω je úhlová frekvence této síly. Stejně dobře by ovšem bylo možno zvolit kosinus či lineární kombinaci.

Pohybová rovnice a její řešení

Pohybovou rovnici

$$m\ddot{x}=-kx-b\dot{x}+F_0\sin\Omega t$$

můžeme snadno upravit na obvyklý tvar

$$\boxed{\ddot{u}+2\delta\dot{u}+\omega_0^2 u=a_0\sin\Omega t}, \tag{4.1.39}$$

který stejně dobře může popisovat děje elektrické jako mechanické ap. (Zde $a_0=F_0/m$.)

Tato rovnice je lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty; je však nehomogenní, má pravou stranu. Z teorie diferenciálních rovnic je známo, že obecné řešení takové rovnice lze napsat jako součet obecného řešení u_H příslušné homogenní rovnice (tj.

téže rovnice bez pravé strany) a libovolného partikulárního řešení u_P celé rovnice. Takové řešení lze nalézt např. metodou variace konstant. Pro naše potřeby však stačí zvolit předpokládaný tvar řešení

$$u_P = \alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t, \tag{4.1.40}$$

vypočítat příslušné derivace, dosadit do rovnice (4.1.39), kterou má u_P řešit, porovnat koeficienty u lineárně nezávislých funkcí $\sin \Omega t$ a $\cos \Omega t$ a ze získaných dvou algebraických rovnic hodnoty α a β vypočítat. Dostaneme

$$\alpha = -\frac{2\delta\, \Omega a_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \quad \beta = -\frac{2\delta \Omega a_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}. \tag{4.1.41}$$

Tvar (4.1.40) lze převést do podoby

$$\boxed{u_P = K \sin(\Omega t + \psi)}, \tag{4.1.42}$$

který je k dalším diskusím ještě vhodnější. Snadno lze ukázat, že

$$K^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha}{\beta},$$

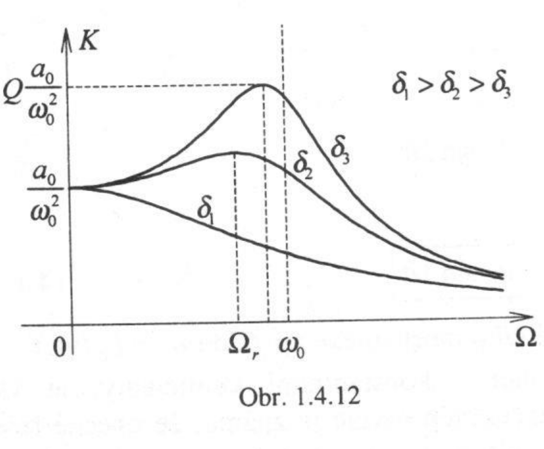
což po dosazení z (4.1.41) dává

$$\boxed{K^2 = \frac{a_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{tg} \psi = -\frac{2\delta\, \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \tag{4.1.43}$$

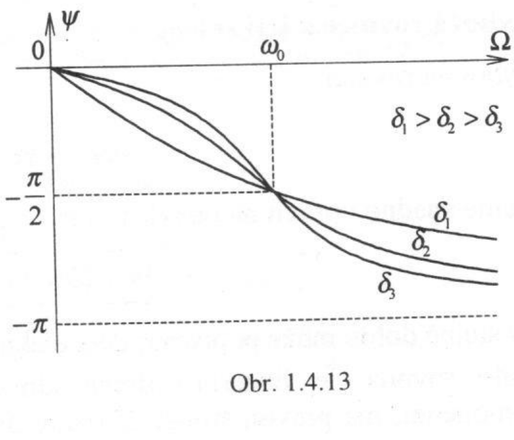
V obecném řešení výchozí rovnice (4.1.39) $u = u_H + u_P$ však první člen, tedy obecné řešení příslušné homogenní rovnice (kterému byl věnován celý předchozí odstavec o tlumeném kmitání), časem vymizí a zůstává jen partikulární řešení (4.1.42).

Po určité době se tedy **ustálí netlumené harmonické kmitání s frekvencí Ω**. Toto řešení již nezávisí na počátečních podmínkách, obě integrační konstanty, přítomné v obecném řešení, s odezněním $u_H \to 0$ ztratily svůj vliv. Konstanty K a ψ nemají povahu libovolných integračních konstant. Nejsou určeny počátečními podmínkami, ale podle (4.1.43) frekvencí Ω a koeficienty ω_0, δ z rovnice (4.1.39).

Rezonance amplitudy



Obr. 1.4.12



Obr. 1.4.13

Derivováním K podle Ω můžeme nalézt maximální, tzv. rezonanční hodnotu amplitudy, viz obr 4.1.12. Ta nastává pro

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}, \qquad (4.1.44)$$

pokud ovšem $\omega_0^2 - 2\delta^2$ není záporné.

Hodnota fázového posunutí ψ výchylky vůči působící síle je trvale záporná podle obr. 4.1.13. Při rovnosti $\Omega = \omega_0$ je odezva posunuta o $\pi/2$. V okolí ω_0 je však budící síla přibližně ve fázi s rychlostí pohybu a proto zde dochází k výrazné rezonanci.

Rezonance výkonu, činitel jakosti Q

Vedle rezonance amplitudy je třeba v oscilátoru věnovat pozornost i tzv. rezonanci výkonu. Okamžitý výkon dodávaný vnější silou do systému je dán součinem této síly a okamžité rychlosti kmitání $\dot{u}$, kterou najdeme derivováním výchylky (4.1.40) nebo (4.1.42).

$$P = ma_0 \sin \Omega t \cdot (-\alpha\,\Omega \sin \Omega t + \beta\,\Omega \cos \Omega t).$$

Je patrné, že složka rychlosti $-\alpha\Omega \sin \Omega t$ je ve fázi s vnější silou, zatímco druhá složka je posunuta ve fázi o $\pi/2$. Spočtěme střední hodnotu výkonu dodaného vnější silou za jednu periodu.

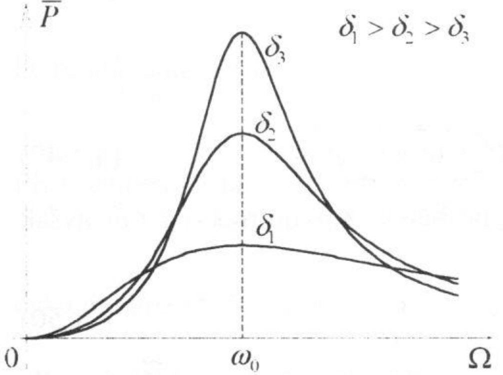
$$\overline{P} = \frac{ma_0}{T}\int_0^T (-\alpha\,\Omega \sin^2 \Omega t + \beta\,\Omega \sin \Omega t \cos \Omega t)\,dt. \qquad (4.1.45)$$

Integrál z prvé části integrandu je roven $-\frac{1}{2}\alpha\,T\Omega$ a integrál ze druhé je roven nule (tzv. jalová část), takže podle (4.1.41)

$$\overline{P} = -\frac{1}{2} ma_0 \alpha\,\Omega = ma_0^2 \frac{\delta\,\Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}.$$

Závislost $\overline{P}(\Omega)$, zobrazená na obr. 4.1.14 dosahuje maxima pro

$$\boxed{\Omega_r = \omega_0}, \qquad (4.1.46)$$



Obr. 4.1.14

nezávisle na velikosti tlumení δ. S klesajícím δ je však rezonanční hodnota vyšší a vrchol štíhlejší.

Důležitou charakteristikou rezonujícího systému je tzv. **činitel jakosti** Q. Je definován jako 2π násobek poměru energie akumulované v systému (přesněji: průměrné energie kmitání) $\overline{W}$ k energii $\Delta_T W$ rozptýlené tlumící silou za jednu periodu. Pro $\overline{W}$ můžeme napsat, podle (4.1.21) a (4.1.43),

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m\Omega^2 K^2 = \frac{1}{2} m\Omega^2 \frac{a_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

a pro $\Delta_T W = T\overline{P}$, podle (4.1.45) a $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$,

$$\Delta_T W = \frac{2\pi}{\Omega} m a_0^2 \frac{\delta \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}.$$

Pro Q v rezonanci, kdy $\Omega = \omega_0$, dostáváme konečně

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta_T W} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \tag{4.1.47}$$

Pro malé δ je Q vysoké, takže i při malé dodávané (a disipované) energii může být akumulovaná energie vysoká. Lze ukázat, že činitel jakosti Q zvyšuje hodnotu maxima amplitudy K v závislosti na klesajícím δ, jak je i naznačeno v obr.4.1.12.

Rezonanční jevy jsou významně využívány v elektrotechnických obvodech, často však nabývají na důležitosti i v mechanických konstrukcích, kde jsou však zpravidla nežádoucí a je snaha je potlačit.

Ve fyzice se vynucené kmity a jevy rezonance vyskytují kupř. při rozptylu světla, při studiu susceptibility dielektrik, v absorpci mikrovln ve vodě apod.

Nelineární systémy, deterministický chaos

Všechny předchozí výsledky platí pro systémy, které jsou lineární. U nelineárních systémů se můžeme dočkat neočekávaných překvapení.

Už v systému matematického kyvadla s harmonicky se pohybujícím bodem závěsu, kdy pohybová rovnice může být napsána ve tvaru

$$\boxed{\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 \sin u = a_0 \sin \Omega t}, \tag{4.1.48}$$

může být závislost výchylky u na čase velice rozmanitá. Závisí složitě na vzájemných poměrech hodnot koeficientů δ, ω_0, a_0, Ω. Pro některé hodnoty těchto, tzv. **řídících či bifurkačních parametrů** je chování harmonické s úhlovou frekvencí $\Omega / 2$. Navzdory tomu, že kyvadlo samo má tendenci chovat se periodicky a vynucující síla je dokonce harmonická, pro jiné hodnoty těchto parametrů je pohyb **nepravidelný** a **neperiodický**. Ačkoli je řešení popsáno diferenciální rovnicí (4.1.48) jednoznačně a z počátečních podmínek je zcela determinováno, může být chování chaotické a dlouhodobě prakticky nepředpovídatelné. Ve vynuceném kmitání kyvadla může nastat tzv. **deterministický chaos.**

4.1.4 Skládání harmonických kmitů

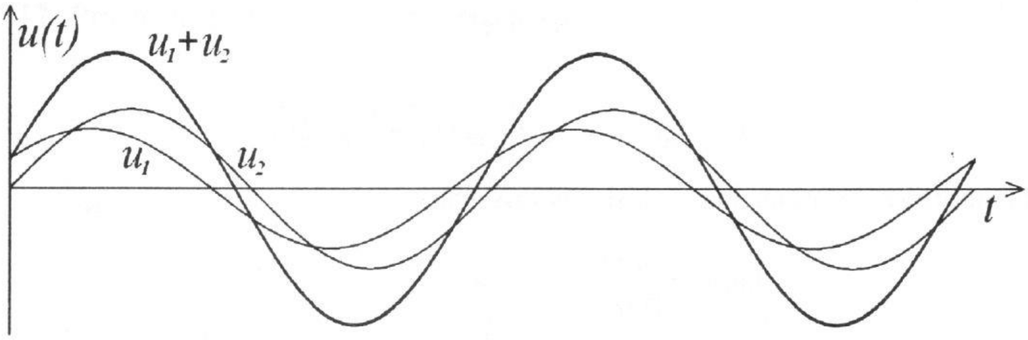
Uvažujme dva kmity popsané vztahy

$$\boxed{u_1 = U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{a} \quad \boxed{u_2 = U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)}. \tag{4.1.49}$$

Výsledná výchylka $u = u_1 + u_2$ má opět čistě harmonický průběh s úhlovou frekvencí ω, avšak s novou amplitudou U a fázovým posunutím φ

$$\boxed{u = U \sin(\omega t + \varphi)}. \qquad 4.1.50)$$

Viz obr. 4.1.15. Hodnoty obou konstant U a φ najdeme rozvedením všech vyjádření podle součtového vzorce $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.



Obr. 4.1.15

$$u = U\sin\omega t\cos\varphi + U\cos\omega t\sin\varphi\,,$$

$$u_1 + u_2 = U_1\sin\omega t\cos\varphi_1 + U_1\cos\omega t\sin\varphi_1 + U_2\sin\omega t\cos\varphi_2 + U_2\cos\omega t\sin\varphi_2\,.$$

Má-li rovnost $u = u_1 + u_2$ platit pro libovolné t, musí koeficienty u obou lineárně nezávislých funkcí $\sin\omega t$ a $\cos\omega t$ být u obou vyjádření shodné. Ze dvou algebraických rovnic $U\cos\varphi = U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2$, $U\sin\varphi = U_1\sin\varphi_1 + U_2\sin\varphi_2$ snadno sečtením kvadrátů a podělením dostaneme

$$\boxed{U^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_1U_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \qquad (4.1.51)$$

a

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_1\sin\varphi_1 + U_2\sin\varphi_2}{U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2}}. \qquad (4.1.52)$$

Je patrné, že U závisí výrazně na fázovém rozdílu obou kmitů $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Jsou-li oba kmity ve fázi, $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, platí $U = U_1 + U_2$ a obě amplitudy se sčítají. Jsou-li kmity v protifázi, $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, je $U = |U_1 - U_2|$. Pro $U_1 = U_2$ a $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ se oba kmity navzájem úplně potlačí, $U = 0$.

Někdy je výhodné k popisu kmitání (a vlnění) použít komplexního zápisu. Výrazy (4.1.49) a (4.1.50) lze psát jako imaginární části (kdybychom použili místo sinů kosiny, šlo by o reálné části) výrazů

$$\hat{u}_1 = U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_1)},\ \hat{u}_2 = U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_2)}, \qquad (4.1.53)$$

které můžeme upravit na

$$\hat{u}_1 = U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1},\ \hat{u}_2 = U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}.$$

Při zavedení komplexních amplitud

$$\hat{U}_1 = U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1},\ \hat{U}_2 = U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2},$$

můžeme pro součet obou kmitů napsat

$$\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = \hat{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \hat{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = (\hat{U}_1 + \hat{U}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

Odtud je ihned vidět, že výsledný kmit má opravdu stejnou úhlovou frekvenci ω jako oba skládané kmity a jeho komplexní amplituda je rovna součtu komplexních amplitud skládaných kmitů. Platí tedy

$$\hat{u} = \hat{U}e^{j\omega t},$$

kde

$$\hat{U} = Ue^{j\varphi} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2}.$$

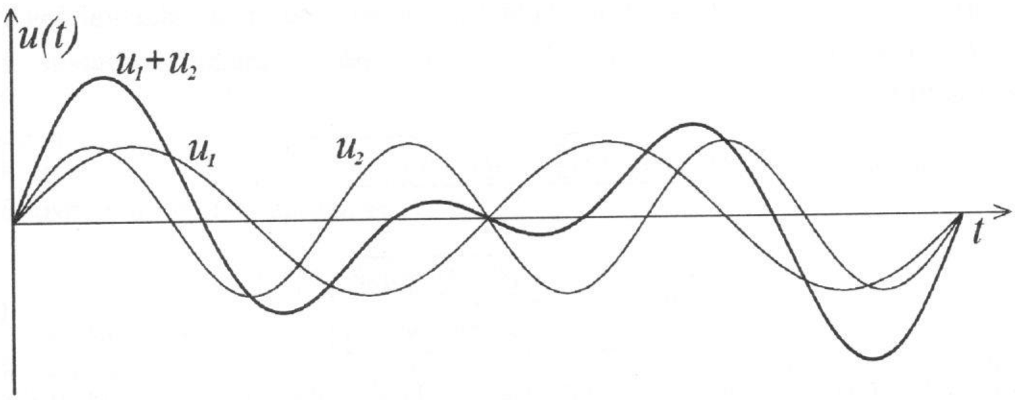
Porovnáním reálných a imaginárních složek dostáváme

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\hat{U}}{\mathrm{Re}\hat{U}} \qquad \text{a} \qquad U^2 = \hat{U}\hat{U}^*,$$

což ovšem neznamená nic jiného, než co říkají rovnice (4.1.52) a (4.1.51).

Skládání kmitů různých frekvencí

Výsledek superpozice dvou harmonických kmitů téhož směru, avšak různých frekvencí $\omega_1 \neq \omega_2$, závisí podstatně na poměru obou frekvencí. Je-li poměr ω_1 / ω_2 **racionálním** číslem, vznikne periodické (ačkoli obecně neharmonické) kmitání s periodou T, která je



Obr. 4.1.16

nejmenším společným násobkem obou period původních T_1 a T_2. Ilustrací je obrázek 4.1.16, s poměrem $\omega_1 : \omega_2 = 2:3$. Pro zjednodušení byl zvolen nulový fázový posuv a oba kmity začínají v počátku. Změníme-li počáteční fázové poměry, změní se tvar výsledného průběhu, průběh však bude opět periodický s periodou T.

Je-li poměr $\omega_1 : \omega_2$ **iracionální**, nemohou se oba skládané kmity setkat tak, aby se pohyb mohl opakovat; pohyb nemůže být periodický.

V elektrotechnických a radioelektronických obvodech nachází rozsáhlé uplatnění ta část matematiky (tzv. Fourierova analýza), která se podrobně skládáním a rozkladem periodických pohybů zabývá. Pro širší rozbor těchto otázek není bohužel v tomto úvodním fyzikálním skriptu dost místa.

Rázy

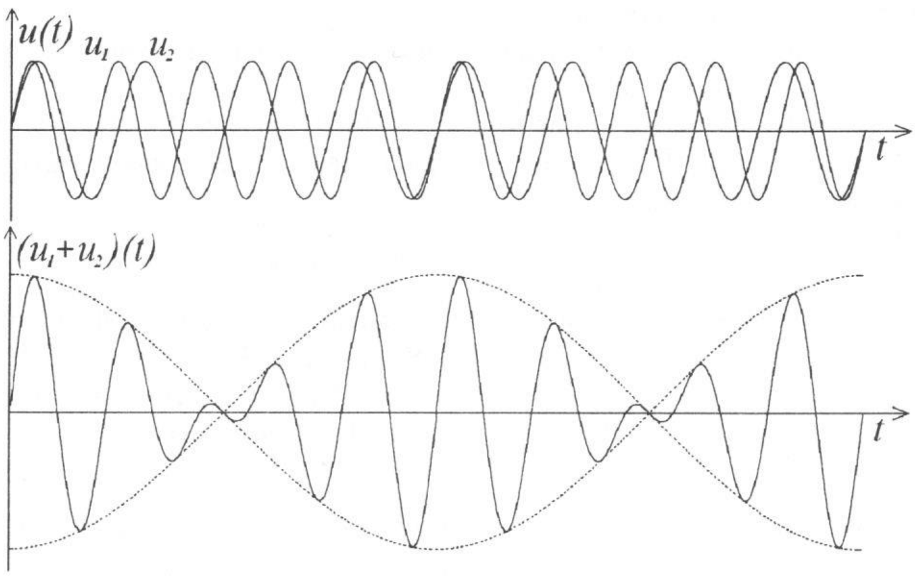
Zvláštní případ superpozice harmonických kmitů nastává při skládání dvou **kmitání téhož směru** s odlišnými, avšak sobě **blízkými frekvencemi**

$$\omega_1 \neq \omega_2, \ |\omega_1 - \omega_2| << \omega_1. \qquad (4.1.54)$$

Vznikají tzv. rázy. Rázy či zázněje spočívají v tom, že výsledné kmitání má sinusový průběh s kmitočtem rovným aritmetickému průměru skládaných kmitočtů, jeho amplituda se však pravidelně mění s kmitočtem rovným polovičnímu rozdílu obou skládaných kmitočtů.

Obr. 4.1.17. Pro jednoduchost nechť oba skládané kmity mají stejné amplitudy a nulové počáteční fáze

$$u_1 = U \sin \omega_1 t\,,\; u_2 = U \sin \omega_2 t\,. \tag{4.1.55}$$



Obr. 4.1.17

Výsledný průběh upravíme užitím vzorce pro součet dvou sinů na tvar

$$u = u_1 + u_2 = U(\sin \omega_1 + \sin \omega_2) = 2U \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\,. \tag{4.1.56}$$

Druhá část výsledného vztahu

$$\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = \sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t = \sin 2\pi f t$$

představuje výsledné kmitání s kmitočtem

$$\boxed{f = \frac{f_1 + f_2}{2}}\,. \tag{4.1.57}$$

První část

$$U^* = 2U \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 2U \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \tag{4.1.58}$$

udává proměnlivou amplitudu výsledných kmitů. Tato amplituda klesá z maximální hodnoty $2U$ k nule a opět se zvětšuje na maximální hodnotu, a to s frekvencí

$$f^* = \left| \frac{f_1 - f_2}{2} \right|.$$

Během jedné periody výrazu (4.1.58) se objeví dvakrát největší rozkmit (zázněj), jednou pro $U^* = 2U$, podruhé pro $U^* = -2U$. Počet těchto maxim udává počet rázů za sekundu a je tedy dvojnásobný proti f^*. **Počet rázů** za sekundu se rovná **rozdílu** obou skládaných kmitočtů,

$$\boxed{f_r = |f_1 - f_2|}. \tag{4.1.59}$$

Při jiných počátečních fázových poměrech probíhají rázy stejně, jen celý průběh je posunut doleva či doprava, tj. v čase $t = 0$ nezačíná maximální výchylkou.

Skládání kmitů navzájem kolmých

Při skládání kmitů různých směrů musíme součet brát ovšem vektorově. Nejlépe lze takové skládání sledovat na obrazovce osciloskopu.

Složme nejprve dva navzájem **kolmé kmity** o **stejné frekvenci**. Výchylky v obou směrech označme jako x a y. O výsledné trajektorii rozhoduje jen fázové posunutí mezi oběma kmity $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \varphi$, takže můžeme psát

$$x = A \sin \omega t\ , \ y = B \sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{4.1.60}$$

Hledáme křivku v rovině x, y, po níž se bude kmitající bod pohybovat. Z parametrických rovnic (4.1.60) potřebujeme vyloučit čas t. Nejprve upravme (4.1.60) na

$$\frac{x}{A} = \sin \omega t\ ,\ \frac{y}{B} = \sin \omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi\,.$$

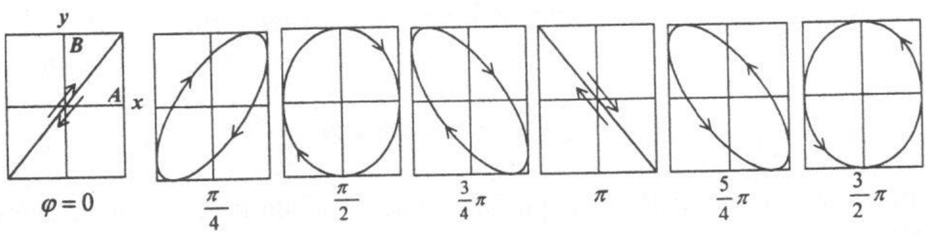
V druhé rovnici $\cos\omega t$ nahraďme $\pm\sqrt{1-\sin^2 \omega t}$ a za $\sin\omega t$ dosaďme z rovnice první. Obdržíme

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\varphi \pm \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi\,.$$

Osamostatníme člen s odmocninou a celou rovnici umocníme na druhou. Po malé úpravě dostaneme konečný výsledek ve tvaru

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi}. \tag{4.1.61}$$

Ten představuje rovnici **elipsy** se středem v počátku souřadnic. Její osy jsou však vůči souřadnicovým osám x a y pootočeny podle hodnoty fázového posunutí obou složek φ.
Viz obr. 4.1.18.



Obr. 4.1.18

Rozeberme některé speciální případy. Pro $\varphi = k\pi$ je $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = \pm 1$, takže rovnice (4.1.61) přejde na

$$\frac{x^2}{A^2} \mp 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} + \frac{y^2}{B^2} = 0\,,$$

Po úpravě máme

$$\left(\frac{x}{A} \mp \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

což jsou rovnice úseček

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0, \; \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0.$$

Pro $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ je $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = \pm 1$, takže

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

což je rovnice elipsy s hlavními osami v osách x, y. Pro $A=B$ přejde elipsa v kružnici.

Nejsou-li směry skládaných kmitů na sebe kolmé, je výpočet poněkud složitější, výsledným obrazcem je však i v tomto případě obecně elipsa.

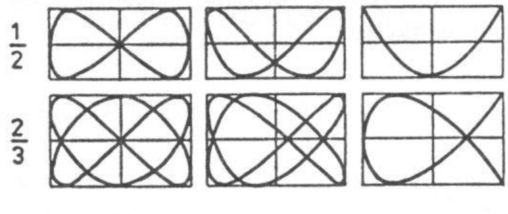
Lissajousovy obrazce

Při skládání dvou kmitů s **odlišnými frekvencemi**

$$x = A\sin\omega_1 t, \; y = B\sin(\omega_2 t + \varphi), \; \omega_1 \neq \omega_2, \tag{4.1.62}$$

je situace složitější a podstatně závisí na poměru obou frekvencí.

Je-li poměr ω_2 / ω_1 **racionálním** číslem, sejdou se po určité době oba průběhy se stejnou fází jako na počátku. Kmitající bod se vrátí do původní polohy a celý průběh se opakuje. Kmitání je periodické a trajektorie je uzavřenou čarou. Této trajektorii se říká Lissajousův obrazec. Obr. 4.1.18 představuje zvláštní případ. Několik jiných případů je znázorněno v obr. 4.1.19.



Obr. 4.1.19

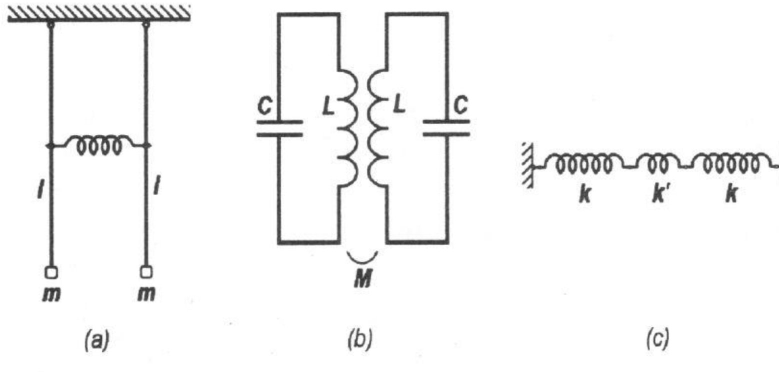
V horní části je poměr frekvencí 1:2, v dolní je poměr 2:3. Jsou zobrazeny tři varianty lišící se hodnotou fázového posuvu φ.

Není-li poměr ω_1 / ω_2 číslem racionálním, nemá výsledné kmitání periodický charakter. Oba kmity se nikdy nesetkají se stejnou fází jako na očátku. Trajektorie není uzavřenou křivkou a postupně (pro $t \to \infty$) hustě vyplní celý obdélník o stranách $2A$ a $2B$.

4.1.5 Systémy se dvěma stupni volnosti

Spřažené (vázané) oscilátory

V posledním odstavci této subkapitoly o kmitání oscilátorů se ještě věnujme dvojici vázaných oscilátorů. Někdy bývá dávána přednost názvu **systém se dvěma stupni volnosti** nebo systém se **dvěma souřadnicemi**. Na obr. 4.1.20 je zobrazeno několik příkladů takového systému. Jsou to kupř. spřažená kyvadla (a), vázaná dvojice LC obvodů (b), nebo dvojice oscilujících hmotných bodů (c). Kyvadla (vykonávající malé kmity, aby systém byl lineární) jsou propojena pružinou nebo gumovou nití. *LC* systémy jsou svázány vzájemnou indukčností *M* a oba hmotné body *m* jsou spojeny slabou pružnou vazbou *k*.

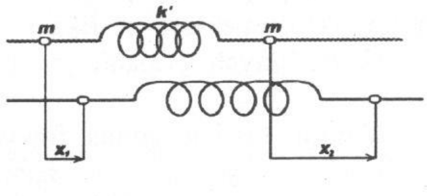


Obr. 4.1.20

Velice snadno, přesvědčivě a názorně lze demonstrovat přenos energie mezi dvojicí kyvadel. Vychýlíme-li jedno z nich z rovnovážné polohy a necháme je kývat, jeho energie se postupně přenáší na kyvadlo sousední, to se posléze rozkývá, zatímco první z kyvadel zmenšuje svou amplitudu až do zastavení, než se postupně energie začne přelévat zpět atd. Na každém z kyvadel tak vlastně pozorujeme dříve diskutovaný jev vzniku rázů.

Ukážeme, že spřažené kmitavé systémy lze popsat i jinak než jen jako kmity jednotlivých oscilátorů. Systém lze **popsat jako celek** zavedením tzv. módů kmitavého pohybu soustavy.

Kmitavé módy



Obr. 4.1.21

Mějme dva hmotné body podle obr. 4.1.20 (c), vychýlené z jejich rovnovážných poloh 1 a 2 o posunutí x_1 a x_2, jak je znázorněno v obr. 4.1.21. Mezi oběma oscilátory tak vzniká pružná vazebná síla o velikosti

$$F' = k'|(x_2 - x_1)|\,. \tag{4.1.63}$$

Pohybové rovnice pro oba oscilátory můžeme snadno napsat

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1)\,,$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)\,.$$

Sečtením a odečtením obou rovnic dostáváme

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2)\,,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_2 - x_1) = -(k + 2k')(x_2 - x_1)\,.$$

To jsou diferenciální rovnice pro nalezení funkcí $u_1 = x_1 + x_2$ a $u_2 = x_2 - x_1$. Obě rovnice mají tvar rovnic pro harmonické kmity, první s konstantou *k*, druhá s konstantou $k + 2k'$. Příslušná řešení snadno najdeme

$$u_1 \equiv x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)\,, \tag{4.1.64}$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ a

$$u_2 \equiv x_2 - x_1 = A_2 \sin(\omega^* t + \varphi_2)\,, \tag{4.1.65}$$

kde $\omega^* = \sqrt{\dfrac{k + 2k'}{m}}$.

Souřadnice u_1 a u_2 odpovídají harmonickým kmitům s různými frekvencemi ω_0, ω^*, odpovídající dvěma různým módům kmitů soustavy obou oscilátorů jako celku. **Souřadnice** x_1 a x_2, udávající pohyby jednotlivých hmotných bodů (oscilátorů vázaných pružnou vazbou F') jsou **superpozicí kmitání módů** 1 a 2,

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega^* t + \varphi_2)]\,,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega^* t + \varphi_2)]\,.$$

Kmitavé chování soustavy závisí na velikosti vazby k'. Je-li $k' = k$, platí $\omega^* = \sqrt{3}\omega_0$. Je-li k' malé, jsou $\omega_0 + \omega^*$ sobě blízké, časové závislosti $x_1(t)$ a $x_2(t)$ se jen málo odlišují a skládáním vznikají pohyby, které byly již vyšetřovány při studiu rázů. Soustavě s n stupni volnosti přísluší n frekvencí a n kmitavých módů.

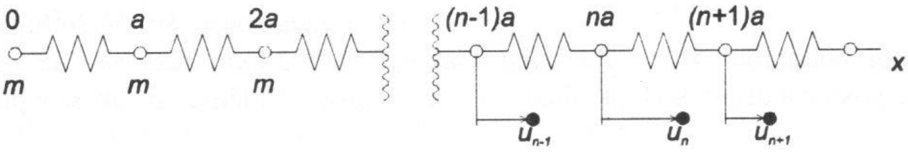
Probíraný případ dvou vázaných oscilátorů umožňuje nahlédnout do problematiky chování vibračních systémů s n stupni volnosti, kterými modelujeme kupř. **chování krystalových mřížek**. Kvantovým aspektem takových vibrací je zavedení představy **fonónů**.

4.2 Vlnění v bodové řadě

4.2.1 Postupné vlnění

Kmity systémů s mnoha stupňi volnosti

Rozšiřme úlohu z předchozího odstavce. Mějme systém hmotných bodů, uspořádaných v řadě podle obr. 4.2.1. Jednotlivé body jsou svázány pružnou vazbou a v rovnovážném stavu



Obr. 4.2.1

jsou rozloženy rovnoměrně po vzdálenostech a. Předpokládejme, že některý z bodů (počáteční) je pod vlivem vnější síly nucen konat harmonické kmity. Pružné vazby k sousedním bodům budou přenášet pohyb postupně na další a další místa a pokud bude vnější zdroj stále dodávat energii, dojde k postupnému rozkmitání celé řady tak, že v ustáleném stavu budou jednotlivé body kmitat se stejnou úhlovou frekvencí ω a stejnou amplitudou U_0.