Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu „Matematika - 2.“

Studijní materiál byl připraven pracovníky katedry E. Novákovou, M. Hyánkovou a L. Průchou za podpory grantu IG ČVUT č. 300012423 a v rámci rozvojového projektu MŠMT.

Obsah

Laplaceova transformace.

1. Definice a základní vzorce

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic a jejich soustav s konstantními koeficienty můžeme použít integrální transformace, které nahrazují operace derivování a integrování násobením či dělením a vlastní řešení diferenciální rovnice je převedeno na řešení soustavy lineárních rovnic. Jedna z nejčastěji používaných integrálních transformací je tzv. *Laplaceova transformace.*

Připomeneme nejprve definici a základní vlastnosti Laplaceovy trasformace, které při řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav používáme.

Definice Laplaceovy transformace. Je-li funkce $f : \langle 0, \infty) \to \mathrm{R}$, pak její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci $F(p)$, která je definována vztahem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

kde p je komplexní číslo. O funkci $f(t)$ mluvíme jako o *předmětu*, funkci $F(p)$ nazýváme *obrazem.* Přiřazení $f(t) \to F(p)$ nazýváme *přímou Laplaceovou transformací* a budeme ji značit symbolem $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$. Inverzní transformaci $F(p) \to f(t)$ nazýváme *zpětnou Laplaceovou trasformací* a budeme ji označovat symbolem $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$. Vztah mezi předmětem a obrazem budeme někdy stručněji zapisovat pomocí symbolu $f(t) \triangleq F(p)$ či $F(p) \triangleq f(t)$.

Poznamenejme, že proměnná p je sice komplexní, ale při výpočtu běžných obrazů počítáme podle stejných pravidel jaká jsme používali při integrování a derivování reálných funkcí reálné proměnné. Při počítání obrazů můžeme předpokládat, že p je reálná kladná proměnná.

Uvedeme základní vlastnosti přímé a zpětné Laplaceovy transformace, které využíváme při řešení diferenciálních rovnic.

Přehled základních vzorců:

Linearita transformací.

$$\mathscr{L}\{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{L}\{f_i(t)\}, \qquad \mathscr{L}^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(p)\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{L}^{-1}\{F_i(p)\}.$$

Základní vztahy transformace.

Označme $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Předmět	Obraz
$f(t)$	$F(p)$
$f(t)\mathrm{e}^{at}$	$F(p-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0+)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - [p^{n-1}f(0+) + p^{n-2}f'(0+) + \ldots + f^{(n-1)}(0+)]$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_p^\infty F(q)\mathrm{d}q$
$\int_0^t f(z)\mathrm{d}z$	$\frac{1}{p}F(p)$

Obraz konvoluce.

Konvolucí funkcí $f(t)$ a $g(t)$ nazýváme funkci

$$(f*g)(t) = (g*f)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

a označíme-li $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$ a $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(p)$, pak

$$\mathscr{L}\{(f*g)(t)\} = \mathscr{L}\{(g*f)(t)\} = F(p)G(p).$$

Tabulka některých obrazů.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n\in\mathrm{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cosh\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t^2e^{at}	$\frac{2}{(p-a)^3}$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^ne^{at},\ n\in\mathrm{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

Řešené úlohy na přímou Laplaceovu transformaci.

Pomocí základních vztahů transformace a s využitím uvedených obrazů některých funkcí určete obraz $F(p)$ k předmětu $f(t)$.

1. $f(t) = 2 + 3t\mathrm{e}^{-2t} - 4t^2\mathrm{e}^{-3t}$

   $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{3}{(p+2)^2} - \frac{4.2}{(p+3)^3}$

   Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = -2,\ a = -3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2},\ t^2 \triangleq \frac{2}{p^3}$.

2. $f(t) = 3\sin 2t - 5\cos 2t$

   $F(p) = \frac{3.2}{p^2+4} - \frac{5p}{p^2+4} = \frac{6-5p}{p^2+4}$

   Použijeme linearitu a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

3. $f(t) = 3t - \sin 2t$

   $F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}$

   Použijeme linearitu transformace a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2},\ \sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

4. $f(t) = t^2 - 1 + 3\mathrm{e}^{-t} + \cos 2t$

   $F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{3}{p+1} + \frac{p}{p^2+4}$

   Použijeme linearitu a vzorce $t^n \triangleq \frac{n!}{p^{n+1}},\ \mathrm{e}^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

5. $f(t) = 4\mathrm{e}^{t} + 2\mathrm{e}^{-3t} + \sin 2t$

   $F(p) = \frac{4}{p-1} + \frac{2}{p+3} + \frac{2}{p^2+4}$

   Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = 1,\ a = -3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

6. $f(t) = (2t+5)\mathrm{e}^{-2t} + 3\cos t - 2\sin 3t$

   $F(p) = \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{5}{p+2} + \frac{3p}{p^2+1} - \frac{6}{p^2+9}$

   Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ t \triangleq \frac{1}{p^2},\ \cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

7. $f(t) = t(\sin 2t + 4\cos 2t)$

   $F(p) = -\left(\frac{2}{p^2+4} + \frac{4p}{p^2+4}\right)' = \frac{4p^2+4p-16}{(p^2+4)^2}$

   Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

8. $f(t) = (t+2)\cos 3t$

   $F(p) = -\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{2p^3+p^2+18p-9}{(p^2+9)^2}$

   Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorec $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

9. $f(t) = (3t^2 + 2t - 1)\mathrm{e}^{-t} + (t+1)\sin 2t$

   $F(p) = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} - \left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + \frac{2}{p^2+4} = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4}$

   Použijeme linearitu, vztahy $\mathrm{e}^{-t}f(t) \triangleq F(p+1),\ tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2},\ t^2 \triangleq \frac{2}{p^3},\ \sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

10. $f(t) = t\mathrm{e}^{-3t} + (t-5)\cos 3t$

    $F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \left(\frac{p}{p^2+9}\right)' - \frac{5p}{p^2+9} = \frac{1}{(p+3)^2} + \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} - \frac{5p}{p^2+9}$

Použijeme linearitu, vztahy $\mathrm{e}^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

11. $f(t) = 3\sin 3t \cos t$

Je $f(t) = \frac{3}{2}(\sin 4t + \sin 2t)$, tedy

$F(p) = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{p^2+16} + \frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{6}{p^2+16} + \frac{3}{p^2+4}$

Použijeme linearitu a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

12. $f(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\cos 5t$

$F(p) = \frac{2(p+3)}{(p+3)^2+25} = \frac{2p+6}{p^2+6p+34}$

Použijeme vztah $\mathrm{e}^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorec $\cos 5t \triangleq \frac{p}{p^2+25}$.

13. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(3\cos 3t - 4\sin 3t)$

$F(p) = \frac{3(p+2)}{(p+2)^2+9} - \frac{4.3}{(p+2)^2+9} = \frac{3p-6}{p^2+4p+13}$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

14. $f(t) = t\mathrm{e}^{-3t} - 2e^{-2t}\sin 3t + 4$

$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{6}{(p+2)^2+9} + \frac{4}{p}$.

Použijeme linearitu, vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a vztah $f(t)\mathrm{e}^{-at} \triangleq F(p-a)$, $a = -2$, $a = -3$.

15. $f(t) = t\sin 4t + (3t\mathrm{e}^{-2t})'$

$F(p) = -(\frac{4}{p^2+16})' + p\frac{3}{(p+2)^2} - \lim_{t\to 0+}(3t\mathrm{e}^{-2t}) = \frac{8p}{(p^2+16)^2} + \frac{3p}{(p+2)^2}$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+))$ a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $t\mathrm{e}^{-2t} \triangleq \frac{1}{(p+2)^2}$.

16. $f(t) = e^{-3t}(1 - 2\sin 3t) + \int_0^t \mathrm{e}^{3u}\cos 3u\,\mathrm{d}u$

$F(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{6}{(p+3)^2+9} + \frac{1}{p}\frac{p-3}{(p-3)^2+9}$

Použijeme linearitu, vztahy $f(t)\mathrm{e}^{at} \triangleq F(p-a)$, $a = 3$, $a = -3$ a $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

17. $f(t) = t\sinh 2t - 2\cos^2 3t + 5$

Je $f(t) = t\sinh 2t - 1 - \cos 6t + 5$, tedy $F(p) = -\left(\frac{2}{p^2-4}\right)' + \frac{-1+5}{p} - \frac{p}{p^2+36} =$ $\frac{4p}{(p^2-4)^2} + \frac{4}{p} - \frac{p}{p^2+36}$.

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce

$\sinh 2t \triangleq \frac{2}{p^2-4}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

18. $f(t) = 4t\sin t\cos t + (2\mathrm{e}^{2t}\cosh^2 t - 4)'$

Je $2\sin t\cos t = \sin 2t$ a $2\cosh^2 t = 1 + \cosh 2t$, tudíž

$f(t) = 2t\sin 2t + (\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}\cosh 2t - 4)'$.

Odtud plyne $F(p) = -2\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + p(\frac{1}{p-2} + \frac{2(p-2)}{(p-2)^2-4} - \frac{4}{p}) - \lim_{t\to 0+}(\mathrm{e}^{2t} + e^{2t}\cosh 2t - 4) =$

$\frac{8p}{(p^2+4)^2} + \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-2)}{p-4} - 2.$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p),\ f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+),\ e^{2t}f(t) \triangleq F(p-2)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4},\ \cosh 2t \triangleq \frac{p}{p^2-4},\ 1 \triangleq \frac{1}{p}.$

19. $f(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 3(t-\pi)$

Je $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2t \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2t \sin\frac{\pi}{2} = -\sin 2t$

a $\sin 3(t-\pi) = \sin 3t \cos 3\pi + \cos 3t \sin 3\pi = -\sin 3t.$

Je $f(t) = -e^{-3t}\sin 2t - \sin 3t$ tedy $F(p) = \frac{-2}{(p+3)^2+4} - \frac{3}{p^2+9}.$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorce

$\sin\omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ \omega = 3,\ \omega = 2.$

20. $f(t) = 5.2^{-t} - 4t3^t$

Je $f(t) = 5\mathrm{e}^{-t\ln 2} - 4t\mathrm{e}^{t\ln 3}$, tudíž $F(p) = \frac{5}{p+\ln 2} - \frac{4}{(p-\ln 3)^2}.$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = -\ln 2,\ a = \ln 3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ t \triangleq \frac{1}{p^2}.$

21. $f(t) = \int_0^t (2 + 4\mathrm{e}^u \sinh 3u)\mathrm{d}u - (3^t - t\sinh 5t)'$

Je $F(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{2}{p} + \frac{4.3}{(p-1)^2-9}\right) - p\left[\frac{1}{p-\ln 3} + \left(\frac{5}{p^2-25}\right)'\right] - \lim\limits_{t\to 0+}(3^t - t\sinh 5t) =$

$\frac{2}{p^2} + \frac{12}{p(p^2-2p-8)} - \frac{p}{p-\ln 3} - \frac{10p^2}{(p^2-25)^2} - 1.$

Použijeme linearitu, vztahy $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p),\ \mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = 1,\ a = \ln 3,$ $f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+),\ tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ \sinh\omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ \omega = 3,\ \omega = 5.$

22. $f(t) = 6\sin t \sinh 3t - 4t^3 - 2\cos t \cosh t$

Je $f(t) = 3\sin t(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}) - 4t^3 - \cos t(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$, tedy

$F(p) = \frac{3}{(p-3)^2+1} + \frac{3}{(p+3)^2+1} - 4\frac{3!}{p^4} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} =$

$\frac{3}{p^2-6p+10} + \frac{3}{p^2+6p+10} - \frac{24}{p^4} - \frac{p-1}{p^2-2p+2} - \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = 3,\ a = -3,\ a - 1,\ a = -1$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{3!}{p^4},\ \sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1},\ \cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}.$

23. $f(t) = (\mathrm{e}^t\sinh t + t^3\mathrm{e}^{2t} - 6)' + 3\int_0^t (u^4 - u\cos 2u)\,\mathrm{d}u$

Je $F(p) = p\left[\frac{1}{(p-1)^2-1} + \frac{3!}{(p-2)^4} - \frac{6}{p}\right] - \lim\limits_{t\to 0+}(\mathrm{e}^t\sinh t + t^3\mathrm{e}^{2t} - 6) + \frac{3}{p}\left[\frac{4!}{p^5} + \left(\frac{p}{p^2+4}\right)'\right] =$

$\frac{p}{p^2-2p} + \frac{6p}{(p-2)^4} - 6 + 6 + \frac{72}{p^6} + \frac{3}{p}\frac{p^2+4-2p^2}{p^2+4} = \frac{1}{p-2} + \frac{6p}{(p-2)^4} + \frac{72}{p^6} + \frac{3(4-p^2)}{p(p^2+4)}.$

Použijeme linearitu, vztahy $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+)),\ \int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p),\ tf(t) \triangleq -F'(p),$ $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a),\ a = 1,\ a = 2$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{6}{p^4},\ t^4 \triangleq \frac{4!}{p^5},\ \sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}.$

24. $f(t) = 3 - 4\int_0^t \sinh(t-u)\cos u\mathrm{d}u$

$F(p) = \frac{3}{p} - 4\left(\frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{3}{p} - \frac{4p}{(p^2-1)(p^2+1)}$

Použijeme linearitu, větu o obrazu konvoluce $(f*g)(t) \triangleq F(p)G(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ \sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1},\ \cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}.$

25. $f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{u-t}(t-u)\sin 3u\,\mathrm{d}u$

Je $f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-u)}(t-u)\sin 3u\,\mathrm{d}u = t\mathrm{e}^{-t} * \sin 3t$ a tedy

$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}\,\frac{3}{p^2+9}$,

když použijeme vztah pro obraz konvoluce na funkce $t\mathrm{e}^{-t}$ a $\sin 3t$ a vzorce $t\mathrm{e}^{-t} \triangleq \frac{1}{(p+1)^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

Neřešené úlohy na přímou Laplaceovu transformaci.

K dané funkci $f(t)$ nalezněte obraz $F(p)$.

	$f(t)$	$F(p)$
1.	$f(t) = 3t^2 - 5t + 1$	$[F(p) = \frac{6}{p^3} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}]$
2.	$f(t) = 2\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{-2t} + 5\mathrm{e}^{-t}$	$[F(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{3}{p+2} + \frac{5}{p+1}]$
3.	$f(t) = t\mathrm{e}^{-2t} + t^2\mathrm{e}^{-3t}$	$[F(p) = \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+3)^3}]$
4.	$f(t) = 6t\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} + t^3\mathrm{e}^{-4t}$	$[F(p) = \frac{6}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+1)} + \frac{6}{(p+4)^4}]$
5.	$f(t) = 2\sin t - 3\cos t$	$[F(p) = \frac{2-3p}{p^2+1}]$
6.	$f(t) = 3\sin 2t + 4\cos 2t$	$[F(p) = \frac{6+4p}{p^2+4}]$
7.	$f(t) = 8t^2\mathrm{e}^{-2t} + 3\sin t$	$[F(p) = \frac{16}{(p+2)^3} + \frac{3}{p^2+1}]$
8.	$f(t) = t\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4p}{(p^2+4)^2}]$
9.	$f(t) = t\cos 5t$	$[F(p) = \frac{p^2-25}{(p^2+25)^2}]$
10.	$f(t) = \mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$	$[F(p) = \frac{2}{p^2+6p+13}]$
11.	$f(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos 2t$	$[F(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+8}]$
12.	$f(t) = (3t-1)\mathrm{e}^{-2t}$	$[F(p) = \frac{1-p}{(p+2)^2}]$
13.	$f(t) = (3+2t)\cos t$	$[F(p) = \frac{3p^3+2p^2+3p-2}{(p^2+1)^2}]$
14.	$f(t) = (1-t)\sin 5t$	$[F(p) = \frac{5p^2-10p+125}{(p^2+25)^2}]$
15.	$f(t) = t\mathrm{e}^{3t}\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4(p-3)}{(p^2-6p+13)^2}]$
16.	$f(t) = (2t-3)\mathrm{e}^{-2t}\cos 4t$	$[F(p) = \frac{-3p^3-16p^2-76p-144}{(p^2+4p+20)^2}]$
17.	$f(t) = (1-2t)\mathrm{e}^{3t}\sin t$	$[F(p) = \frac{p^2-10p+22}{(p^2-6p+10)^2}]$
18.	$f(t) = t^2\sin 2t$	$[F(p) = \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}]$
19.	$f(t) = t^2\cos 3t$	$[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}]$
20.	$f(t) = 4\sin^2 3t + t\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$	$[F(p) = \frac{72}{p(p^2+36)} + \frac{p^2-6p+5}{(p^2-6p+13)^2}]$
21.	$f(t) = \sin 3t\cosh 2t - \cos 3t\sinh 2t$	$[F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{5-p}{p^2-4p+13} + \frac{5+p}{p^2+4p+13}\right)]$
22.	$f(t) = 2 + \mathrm{e}^{-3t}\cos t\cos 3t$	$[F(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{p+3}{p^2+6p+25} + \frac{p+3}{p^2+6p+13}\right)]$
23.	$f(t) = (\mathrm{e}^{-t}\sinh t + t^4\mathrm{e}^{2t} - 2\cosh 3t)'$	$[F(p) = p\left(\frac{1}{p^2+2p} + \frac{24}{(p-2)^5} - \frac{2p}{p^2-9}\right) + 2]$
24.	$f(t) = (3^t - 2\sin t\sinh 2t + 4)'$	$[F(p) = p\left(\frac{1}{p-\ln 3} - \frac{1}{p^2-4p+5} + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2+4p+5}\right) - 7]$
25.	$f(t) = \int_0^t (4 - 6u\cos^2 3u + 8\sin 2u\cos 2u)\mathrm{d}u$	$[F(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{3(36-p^2)}{(p^2+36)^2} + \frac{16}{p^2+16}\right)]$
26.	$f(t) = 4\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-3t} + 5\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p+3} + \frac{10}{p^2+4}]$
27.	$f(t) = (1+3t)\mathrm{e}^{-2t} + 4\cos 2t - 2\sin 2t$	$[F(p) = \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{4p}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4}]$
28.	$f(t) = \sin 2t\sin 3t$	$[F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+25}\right)]$
29.	$f(t) = ta^t,\ a > 0$	$[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2},\ a^t = \mathrm{e}^{t\ln a}]$
30.	$f(t) = 3\cos^2 2t$	$[F(p) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+16}\right)]$

31. $f(t) = 4\cos 2t\cos 3t \quad [F(p) = \frac{4p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}]$
32. $f(t) = 6\sin 3t\cos t \quad [F(p) = \frac{18(p^2+8)}{(p^2+16)(p^2+4)}]$
33. $f(t) = 5\sin 4t\sin t \quad [F(p) = \frac{40p}{(p^2+9)(p^2+25)}]$
34. $f(t) = 4\mathrm{e}^{-2t}\sin^2 3t \quad [F(p) = \frac{72}{(p+2)(p^2+4p+40)}]$
35. $f(t) = 3\mathrm{e}^{-t}\cos^2 2t \quad [F(p) = \frac{3(2p^2+3p+17)}{2(p+1)(p^2+2p+17)}]$

2. Zpětná Laplaceova transformace, předmět k racionální funkci.

Hledáme funkci $f(t)$, pro kterou je $F(p) \triangleq f(t)$, (tedy $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$) a $F(p)$ je racionální funkce. Poznamenejme, že z vlastností Laplaceovy transformace vyplývá, že ve funkci $F(p)$ je stupeň čitatele alespoň o jednu menší než stupeň jmenovatale.

Popis algoritmu.

Funkci $F(p)$ rozložíme na součet parciálních zlomků a k jednotlivým sčítancům najdeme předměty pomocí vztahů a vzorců, které jsme uvedli v prvním odstavci. Zde se omezíme na nejjednodušší případy. Budeme uvažovat, že jmenovatel funkce $F(p)$ má komplexní kořeny násobnosti nejvýše 2. Pro reálné kořeny není třeba nějaké omezení uvažovat.

V rozkladu racionální funkce dostaneme jako jeho členy zlomky těchto tvarů:
$\frac{A}{p-a}$ pro reálný jednoduchý kořen $p = a$.
$\frac{A}{(p-a)^2}$ pro dvojnásobný reálný kořen $p = a$.
$\frac{A}{(p-a)^n}$ pro reálný kořen $p = a$ násobnosti $n, n \geq 1$.
$\frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}$ pro ryze imaginarní dvojici jednoduchých kořenů $p = \pm \mathrm{j}\omega$.
$\frac{Ap+B}{(p-a)^2+\omega^2}$ pro dvojici jednoduchých komplexních kořenů $p = a \pm \mathrm{j}\omega,\ a \neq 0$.
$\frac{Ap+B}{[p^2+\omega^2]^2}$ pro ryze imaginarní dvojici dvojnásobných kořenů $p = \pm \mathrm{j}\omega$.
$\frac{Ap+B}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$ pro dvojici dvojnásobných komplexních kořenů $p = a \pm \mathrm{j}\omega,\ a \neq 0$.
Uvedeme základní vzorce, které budeme při výpočtu předmětu používat.

Přehled vzorců
Je $a \in R,\ b > 0$ a $\omega > 0$.

	$F(p)$	$f(t)$
1.	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
2.	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t\mathrm{e}^{at}$
3.	$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{at}$
4.	$\frac{1}{(p-a)^n},\ n \in N$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{at}$
5.	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin \omega t$
6.	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
7.	$\frac{1}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{at}\sin \omega t$
8.	$\frac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{at}(\cos \omega t + \frac{a}{\omega}\sin \omega t)$
9.	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t\cos \omega t)$
10.	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}t\sin \omega t$
11.	$\frac{1}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}\mathrm{e}^{at}(\sin \omega t - \omega t\cos \omega t)$
12.	$\frac{p}{[(p-a)^2+\omega^2]^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}\mathrm{e}^{at}(\omega^2 t\sin \omega t + a\sin \omega t - a\omega t\cos \omega t)$
13.	$\frac{1}{p^2-b^2}$	$\frac{1}{b}\sinh bt$
14.	$\frac{p}{p^2-b^2}$	$\cosh bt$

Řešené úlohy na zpětnou Laplaceovu transformaci.
Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+3}$

   Rovnice $p^2 + 4p + 3 = 0$ má dva reálné kořeny $p_1 = -3$ a $p_2 = -1$. Je tedy
   $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4p+3} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+1}$.
   Rovnici vynásobíme jmenovatelem a pro neurčité koeficienty A a B dostaneme rovnici
   $2p + 3 = A(p + 1) + B(p + 3)$.
   Dosadíme hodnoty kořenů $p_1 = -3$ a $p_2 = -1$ a dostaneme:
   $p = -3: \quad -3 = -2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$;
   $p = -1: \quad 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.
   Je tedy $F(p) = \frac{3}{2}\frac{1}{p+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1}$, a tudíž
   $f(t) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t},\ t \geq 0$.
   Použijeme linearitu zpětné transformace a vztah $\frac{1}{p-a} \triangleq \mathrm{e}^{at}$ pro $a = -1$ a $a = -3$.

2. $F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p^3+7p^2+10p}$

   Rovnice $p^3 + 7p^2 + 10p = 0$ má kořeny $p_1 = 0,\ p_2 = -2$ a $p_3 = -5$ a tudíž je
   $F(p) = \frac{3p^2+2p-4}{p(p+2)(p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+5}$
   Rovnici vynásobíme jmenovatelem a pro neurčité koeficienty dostaneme rovnici:
   $3p^2 + 2p - 4 = A(p + 2)(p + 5) + Bp(p + 5) + Cp(p + 2)$.
   Do rovnice postupně dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:
   $p = 0: \quad -4 = 7A \Rightarrow A = -\frac{4}{7}$;
   $p = -2: \quad 4 = -6B \Rightarrow B = -\frac{2}{3}$;
   $p = -5: \quad 61 = 15C \Rightarrow C = \frac{61}{15}$.
   Je tedy
   $F(p) = -\frac{4}{7}\frac{1}{p} - \frac{2}{3}\frac{1}{p+2} + \frac{61}{15}\frac{1}{p+5}$ a tudíž je
   $f(t) = -\frac{4}{7} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{61}{15}\mathrm{e}^{-5t},\ t \geq 0$.
   Použijeme linearitu zpětné transformace a vztah $\frac{1}{p-a} \triangleq \mathrm{e}^{at}$ pro $a = 0,\ a = -2$ a $a = -5$.

3. $F(p) = \frac{3p^2+5}{(p+1)(p+3)^2}$

   Jmenovatel má jednoduchý kořen $p = -1$ a dvojnásobný kořen $p = -3$. Pro funkci $F(p)$ dostaneme rozklad ve tvaru
   $\frac{3p^2+5}{(p+1)(p+3)^2} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3}$
   Po vynásobení jmenovatelem dostaneme pro neurčité koeficienty rovnici
   $(\clubsuit) \qquad 3p^2 + 5 = A(p + 3)^2 + B(p + 1) + C(p + 1)(p + 3)$.
   Dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:
   $p = -1: \quad 8 = 4A \Rightarrow A = 2$;
   $p = -3: \quad 32 = -2B \Rightarrow B = -16$.
   Hodnotu C určíme dosazením některé jiné hodnoty do rovnice $(\clubsuit)$ a nebo porovnáním koeficientů u některé mocniny proměnné p. Připomeňme, že volíme nejvyšší nebo nejnižší mocniny. Ty obvykle mají jednodušší vyjádření. Zvolíme mocninu p^2 a dostaneme podmínku:

$p^2: \quad 3 = A + C \Rightarrow C = 3 - A = 3 - 2 = 1.$

Je tedy $F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{16}{(p+3)^2} + \frac{1}{p+3}$ a tudíž

$f(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}(1 - 16t),\ t \geq 0.$

Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{1}{p-a} \triangleq \mathrm{e}^{at}$ pro $a = -1,\ a = -3$ a $\frac{1}{(p+3)^2} \triangleq t\mathrm{e}^{-3t}$.

4. $F(p) = \frac{4p+7}{p^2+16}$

   Je

   $\frac{4p+7}{p^2+16} = 4\frac{p}{p^2+16} + \frac{7}{4}\frac{4}{p^2+16}$

   a tudíž

   $f(t) = 4\cos 4t + \frac{7}{4}\sin 4t,\ t \geq 0.$

   Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{4}{p^2+16} \triangleq \sin 4t \quad \frac{p}{p^2+16} \triangleq \cos 4t$.

5. $F(p) = \frac{2p-7}{(p+6)(p^2+4)}$

   Pro funkci $F(p)$ dostaneme rozklad na zlomky ve tvaru

   $\frac{2p-7}{(p+6)(p^2+4)} = \frac{A}{p+6} + \frac{Bp+C}{p^2+4}$.

   Po vynásobení jmenovatelem získáme pro neurčité koeficienty rovnici

   $(\spadesuit) \quad 2p - 7 = A(p^2 + 4) + (Bp + C)(p + 6).$

   Po dosazení hodnoty $p = -6$ do rovnice $(\spadesuit)$ dostaneme

   $p = -6: \quad -19 = 40A \Rightarrow A = -\frac{19}{40}.$

   Zbývající koeficienty určíme opět porovnáním vhodné mocniny proměnné p v rovnici $(\spadesuit)$. Postupně získáme:

   $p^2: \quad 0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{19}{40};$

   $p^0: \quad -7 = 4A + 6C \Rightarrow C = \frac{1}{6}\left(-7 + \frac{19}{10}\right) = -\frac{51}{60}.$

   Je tedy

   $F(p) = -\frac{19}{40}\frac{1}{p+6} + \frac{19}{40}\frac{p}{p^2+4} - \frac{51}{120}\frac{2}{p^2+4}$

   a tudíž

   $f(t) = -\frac{19}{40}\mathrm{e}^{-6t} + \frac{19}{40}\cos 2t - \frac{51}{120}\sin 2t,\ t \geq 0.$

   Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $\frac{1}{p+6} \triangleq \mathrm{e}^{-6t}$ a $\frac{2}{p^2+4} \triangleq \sin 2t$,

   $\frac{p}{p^2+4} \triangleq \cos 2t$.

6. $F(p) = \frac{4p+5}{p^2+4p+13}$

   Rovnice $p^2 + 4p + 13 = 0$ má komplexní kořeny. Lze tedy jmenovatele upravit na tvar

   $p^2 + 4p + 13 = p^2 + 4p + 4 + 9 = (p + 2)^2 + 9$

   a tedy

   $\frac{4p+5}{p^2+4p+13} = \frac{4(p+2)}{(p+2)^2+9} + \frac{5-8}{(p+2)^2+9}.$

   Odtud plyne, že $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(4\cos 3t - \sin 3t),\ t \geq 0.$

   Použijeme linearitu zpětné transformace a vztahy $F(p + 2) \triangleq f(t)\mathrm{e}^{-2t}$ a $\frac{3}{p^2+9} \triangleq \sin 3t$ $\frac{p}{p^2+9} \triangleq \cos 3t$.

7. $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)^4}$

   Je

   $\frac{p+2}{(p+1)^4} = \frac{(p+1)+1}{(p+1)^4} = \frac{1}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^4}$,

   tedy

   $F(p) = \frac{1}{2}\frac{2!}{(p+1)^3} + \frac{1}{6}\frac{3!}{(p+1)^4}$.

   Odtud plyne, že

   $f(t) = \frac{1}{3}t^2\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{-t},\ t \geq 0$.

   Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p+1) \triangleq f(t)\mathrm{e}^{-t}$ a vzorce $\frac{2}{p^3} \triangleq t^2$ a $\frac{6}{p^4} \triangleq t^3$.

8. $F(p) = \frac{p^3}{(p+2)^2(p+1)(p+3)}$

   Nejprve rozložíme funkci $F(p)$ na součet parciálních zlomků. Příslušný rozklad má tvar

   $\frac{p^3}{(p+2)^2(p+1)(p+3)} = \frac{A}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+3}$.

   Po vynásobení rovnosti jmenovatelem dostaneme pro neurčité koeficienty rovnici

   (♣) $p^3 = A(p+1)(p+3) + B(p+2)(p+1)(p+3) + C(p+2)^2(p+3) + D(p+2)^2(p+1)$.

   Dosadíme do této rovnice hodnoty kořenů jmenovatele a dostaneme:

   $p = -2: \quad -8 = -A \Rightarrow A = 8;$

   $p = -1: \quad -1 = 2C \Rightarrow C = -\frac{1}{2};$

   $p = -3: \quad -27 = -2D \Rightarrow D = \frac{27}{2}.$

   Jestliže dosadíme do rovnice (♣) hodnotu $p = 0$, získáme podmínku pro poslední z koeficientů. Je

   $0 = 3A + 6B + 12C + 4D \Rightarrow B = -\frac{1}{6}(24 - 6 + 54) = -12.$

   Je

   $F(p) = \frac{8}{(p+2)^3} - \frac{12}{p+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{27}{2}\frac{1}{p+3}$,

   tudíž

   $f(t) = 8t\mathrm{e}^{-2t} - 12\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{27}{2}\mathrm{e}^{-3t},\ t \geq 0.$

   Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p-a) \triangleq f(t)\mathrm{e}^{at},\ a = -2,$ $a = -1,\ a = -3$ a vzorce $\frac{1}{p^2} \triangleq t$ a $\frac{1}{p} \triangleq 1$.

9. $F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$

   Danou funkci rozložíme na parciální zlomky. Rozklad má tvar

   $\frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+2}$

   a po vynásobení jmenovatelem dpstaneme pro neurčité koeficienty rovnici

   (♠) $1 = A(p+2)^2 + Bp + Cp(p+2)$.

   Do této rovnice dosadíme hodnoty kořenů jmenovatele a postupně dostaneme:

   $p = 0; \quad 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4};$

   $p = -2; \quad 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$

   Dosadíme-li do rovnice (♠) některou jinou hodnotu, např. $p = 1$, dostaneme vztah

   $1 = 9A + B + 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}(1 - 9A - B) = \frac{1}{3}(1 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$

   Je tedy $F(p) = \frac{1}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+2}$, tudíž

$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t},\ t \geq 0.$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p+2) \triangleq \mathrm{e}^{-2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$.

Úlohu můžeme řešit také jinak, jestliže použijeme vztah $\frac{1}{p}F(p) \triangleq \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$.

Je $\frac{1}{(p+2)^2} \triangleq t\mathrm{e}^{-2t}$ a tedy

$\frac{1}{p}\frac{1}{(p+2)^2} \triangleq \int_0^t u\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{2}u\mathrm{e}^{-2u} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2u}\right]_0^t = -\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4},\ t \geq 0.$

10. $F(p) = \frac{p^2}{(p-2)^3}$

Danou funkci nejprve vyjádříme jako součet parciálních zlomků. Zde můžeme rozklad získat jednoduchou úpravou. Je

$\frac{p^2}{(p-2)^3} = \frac{(p^2-4p+4)+4p-4}{(p-2)^3} = \frac{(p-2)^2+4(p-2)+4}{(p-2)^3} = \frac{1}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2} + \frac{4}{(p-2)^3},$

tudíž

$f(t) = \mathrm{e}^{2t}(1 + 4t + 2t^2),\ t \geq 0.$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p-2) \triangleq \mathrm{e}^{2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$, $\frac{2}{p^3} \triangleq t^2$.

11. $F(p) = \frac{p-5}{p^2+2p+10}$

Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny a proto danou funkci upravíme takto:

$\frac{p-5}{p^2+2p+10} = \frac{p-5}{(p^2+2p+1)+9} = \frac{(p+1)-6}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - 2\frac{3}{(p+1)^2+9}.$

Je pak

$f(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - 2\sin 3t),\ t \geq 0,$

jestliže použijeme vztah $F(p+1) \triangleq \mathrm{e}^{-t}f(t)$ a vzorce $\frac{p}{p^2+9} \triangleq \cos 3t$, $\frac{3}{p^2+9} \triangleq \sin 3t$.

12. $F(p) = \frac{p+3}{p(p^2+1)} + \frac{1}{(p-2)^3}$

První ze dvou zlomků rozdělíme na součet a získáme:

$\frac{p+3}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p}\frac{3}{p^2+1} + \frac{1}{(p-2)^3}.$

Odtud plyne, že

$f(t) = \sin t + 3\int_0^t \sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{2t} = \sin t + 3 - 3\cos t + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{2t},\ t \geq 0.$

Použijeme linearitu transformace a vzorce $\frac{1}{p^2+1} \triangleq \sin t$, $\frac{1}{(p-2)^3} \triangleq \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{2t}$.

Neřešené úlohy na zpětnou Laplaceovu transformaci.

Určete předmět $f(t)$ k racionální funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+3p^2+2p}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-t},\ t \geq 0]$
2. $F(p) = \frac{1}{p(p+3)^2}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3t},\ t \geq 0]$
3. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{3}t\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t},\ t \geq 0]$
4. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ $\quad [f(t) = t - \sin t,\ t \geq 0]$
5. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t},\ t \geq 0]$
6. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin t,\ t \geq 0]$
7. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2-2p+5}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{t}(4\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t),\ t \geq 0]$

8. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4}$ $\quad [f(t) = 2\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t,\ t \geq 0]$
9. $F(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p+10}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-t}(3\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t),\ t \geq 0]$
10. $F(p) = \frac{3p-5}{p^2+2p+5}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-t}(3\cos 2t - 4\sin 2t),\ t \geq 0]$
11. $F(p) = \frac{6p+3}{p^3+5p^2+9p+5}$ $\quad [f(t) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 5\sin t),\ t \geq 0]$
12. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2(p+1)^2(p+2)}$ $\quad [f(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{23}{4} - 7t\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-t} - \frac{11}{4}\mathrm{e}^{-2t},\ t \geq 0]$
13. $F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4)^2}$ $\quad [f(t) = -\frac{3}{8}t\cos 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{3}{16}\sin 2t,\ t \geq 0]$
14. $F(p) = \frac{2p^2-4p+5}{p^3+7p^2+9p+8}$ $\quad [f(t) = \frac{11}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{21}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{43}{6}\mathrm{e}^{-4t},\ t \geq 0]$
15. $F(p) = \frac{4p+5}{p^2+6p+13}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-3t}(4\cos 2t - \frac{7}{2}\sin 2t,\ t \geq 0]$
16. $F(p) = \frac{3p^2-6p+2}{(p+1)^3(p+3)}$ $\quad [f(t) = \frac{11}{2}t^2\mathrm{e}^{-t} - \frac{35}{4}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{47}{8}\mathrm{e}^{-t} - \frac{47}{8}\mathrm{e}^{-3t},\ t \geq 0]$
17. $F(p) = \frac{2p^2-3p+5}{p(p+1)(p+3)}$ $\quad [f(t) = \frac{5}{3} - 5\mathrm{e}^{-t} + \frac{16}{3}\mathrm{e}^{-3t},\ t \geq 0]$
18. $F(p) = \frac{4p+6}{p^3+7p^2+10p}$ $\quad [f(t) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{14}{15}\mathrm{e}^{-5t},\ t \geq 0]$
19. $F(p) = \frac{5p-2}{p^2+4p+5}$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(5\cos t - 12\sin t),\ t \geq 0]$
20. $F(p) = \frac{2p+3}{(p+1)^3}$ $\quad [f(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2t)\mathrm{e}^{-t},\ t \geq 0]$
21. $F(p) = \frac{p+3}{p^2(p^2+1)}$ $\quad [f(t) = 3t + 1 - \cos t - 3\sin t,\ t \geq 0]$
22. $F(p) = \frac{5p^2+10}{p(p^2-2p+5)}$ $\quad [f(t) = 2 + \mathrm{e}^{t}(3\cos 2t + \frac{7}{2}\sin 2t),\ t \geq 0]$
23. $F(p) = \frac{p^2+p-4}{(p+4)^2}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{2}t\sin 2t + t\cos 2t,\ t \geq 0]$
24. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3}$ $\quad [f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t},\ t \geq 0]$

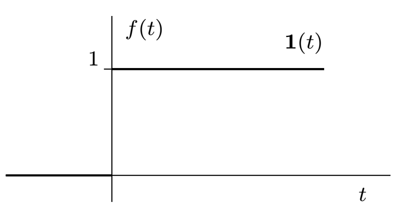
3. Laplaceova transformace impulsu.

Při hledání obrazu funkce $f(t)$, která je definována na omezeném intervalu nebo je dána několika vzorci na různých intervalech ze svého definičního oboru používáme při výpočtu přímo vzorec pro obraz a nebo používáme tvrzení o obrazu posunuté funkce. Toto tvrzení se nazývá *věta o translaci.*

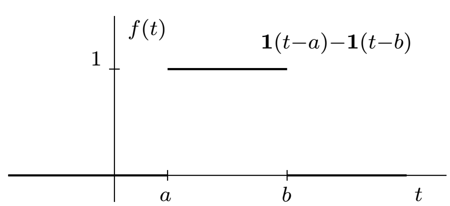
Označíme symbolem $\mathbf{1}(t)$ funkci jednotkový skok, která je definována předpisem

$$\mathbf{1}(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0 \end{array} \right.$$

a jejíž průběh je znázorněn na obrázku 1.



Obr.1. Jednotkový skok



Obr. 2. Impuls

Věta o translaci. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak $f(t-a)\mathbf{1}(t-a) \triangleq \mathrm{e}^{-ap}F(p)$ pro $a > 0$.

Ukážeme na příkladech výpočet obrazu funkcí popsaného typu. Připomeňme, že stále předpokládáme, že uvažované předměty jsou definovány pouze pro nezápornou hodnotu argumentu.

Řešené příklady na obraz impulsu.

1. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

   Podle definice je

   $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^2 1.\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^2 = \frac{1}{p}(1-\mathrm{e}^{-2p}).$

   Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu.

   Je $f(t) = 2.[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)] \triangleq \frac{2}{p}(1-\mathrm{e}^{-2p})$,

   když použijeme vzorec $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a vztah $f(t-2)\mathbf{1}(t-2) \triangleq F(p)\mathrm{e}^{-2p}$.

2. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right.$

   Podle definice je

   $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^3 t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p} - \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p^2}\right]_0^3 =$
   $\frac{1}{p^2} - \frac{3}{p}\mathrm{e}^{-3p} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3p}$,

   když použijeme integraci per-partes.

   Pomocí věty o translaci a vzorce pro obraz $t \triangleq \frac{1}{p^2}$ můžeme počítat takto.

   Je

   $f(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-3)] = t\mathbf{1}(t) - [(t-3)+3]\mathbf{1}(t-3) = t\mathbf{1}(t) - (t-3)\mathbf{1}(t-3) - 3\mathbf{1}(t-3).$

   Odtud plyne, že

   $F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3p} - \frac{3}{p}\mathrm{e}^{-3p}$,

   když použijeme vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$ a vztah $f(t-3)\mathbf{1}(t-3) \triangleq F(p)\mathrm{e}^{-3p}$.

   V dalších úlohách budeme hledat obraz impulsu pomocí věty o translaci. Přímý výpočet z definice využívá integračních metod, které byly probírany v předchozím kursu matematiky.

3. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{e}^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

   Je

   $f(t) = \mathrm{e}^{-t}[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)] = \mathrm{e}^{-(t-1)-1}\mathbf{1}(t-1) - \mathrm{e}^{-(t-2)-2}\mathbf{1}(t-2) =$
   $\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$

   Podle věty o translaci je

   $F(p) = (e^{-1}\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-2p})\frac{1}{p+1}$,

   když použijeme vzorec $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$.

4. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \cos t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

   Je

   $f(t) = \cos t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})] + \mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2}).$

   Nejprve upravíme výraz

   $\cos t\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2}) = \cos[(t-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}]\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2}) =$

$\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})\left(\cos(t-\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})-\sin(t-\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})\right)=-\sin(t-\frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})$.

Pro funkci $f(t)$ máme celkové vyjádření

$f(t)=\cos t\,\mathbf{1}(t)+\sin(t-\frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})+\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})$.

Použijeme větu o translaci a dostaneme obraz

$F(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}}$.

Při výpočtu jsme použili vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1},\ \sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1},\ 1 \triangleq \frac{1}{p}$.

5. $f(t)=\left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0\le t\le \pi, \\ -\sin t, & \pi<t\le 2\pi, \\ 0, & t>2\pi. \end{array}\right.$

Je

$f(t)=-\sin t[\mathbf{1}(t-\pi)-\mathbf{1}(t-2\pi)]=-\sin[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi)+$

$\sin[(t-2\pi)+2\pi]\mathbf{1}(t-2\pi)]=\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\mathbf{1}(t-2\pi)$.

Odtud plyne, že

$F(p)=\frac{1}{p^2+1}(\mathrm{e}^{-p\pi}+\mathrm{e}^{-2p\pi})$,

když použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

6. $f(t)=\left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0\le t\le \frac{\pi}{4}, \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{4}<t\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t>\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$

Je

$f(t)=\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})+\sin 2t[\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})-\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})]=$

$\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})+\sin 2[(t-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})-\sin 2[(t-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}]\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})=$

$\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})+\cos 2(t-\frac{\pi}{4})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{4})+\sin 2(t-\frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2})$.

Odtud plyne, že obraz

$F(p)=\frac{1}{p}(1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}})+\frac{p}{p^2+4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{2}{p^2+4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Použijeme větu o translaci a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4},\ \sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

7. $f(t)=\left\langle \begin{array}{ll} t, & 0\le t\le 1, \\ 2-t, & 1<t\le 2, \\ 0, & t>2. \end{array}\right.$

Je $f(t)=t[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-1)]+(2-t)[\mathbf{1}(t-1)-\mathbf{1}(t-2)]=$

$t\mathbf{1}(t)-[(t-1)+1]\mathbf{1}(t-1)-[(t-1)-1]\mathbf{1}(t-1)+(t-2)\mathbf{1}(t-2)=$

$t\mathbf{1}(t)-2(t-1)\mathbf{1}(t-1)+(t-2)\mathbf{1}(t-2)$.

Odtud plyne, že obraz

$F(p)=\frac{1}{p^2}(1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $t \triangleq \frac{1}{p^2}$.

8. $f(t)=\left\langle \begin{array}{ll} \sin t, & 0\le t\le \pi, \\ 0, & t>\pi. \end{array}\right.$

Je $f(t)=\sin t[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\pi)]=\sin t\,\mathbf{1}(t)-\sin[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi)=$

$\sin t\,\mathbf{1}(t)+\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1+\mathrm{e}^{-p\pi})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

9. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1-\cos t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array} \right.$

Je $f(t) = (1-\cos t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi)] =$

$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi) - \cos t\mathbf{1}(t) + \cos[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi) =$

$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi) - \cos t\mathbf{1}(t) - \cos(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p}(1-\mathrm{e}^{-p\pi}) - \frac{p}{p^2+1}(1+\mathrm{e}^{-p\pi})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

Neřešené úlohy na obraz impulsu.

Určete obraz $F(p)$ k danému impulsu $f(t)$.

1. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 2 < t. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{2}{p}(1-e^{-p})]$

2. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p}(\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-3p})]$

3. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-t}, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p+1}(1-\mathrm{e}^{-2(p+1)})]$

4. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & t > 1. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{2}{p^2}(1-\mathrm{e}^{-p})]$

5. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(1-\mathrm{e}^{-p}) - \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}]$

6. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -1, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p}(1-2\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})]$

7. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 3-t, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(2-3\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-3p})]$

8. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 2, \\ 3-t, & 2 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(1-\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-2p} + \mathrm{e}^{-3p})]$

9. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \sin t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$ $[F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1-p\mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}})]$

10. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \quad [F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2\mathrm{e}^{-p} + 2\mathrm{e}^{-3p} - \mathrm{e}^{-4p})] \\ 2 - t, & 1 < t \le 3, \\ t - 4, & 3 < t \le 4, \\ 0, & t > 4. \end{array} \right.$

4. Zpětná transformace obrazů impulsů.

Při hledání předmětu k funkcím, které obsahují výraz e^{-ap}, $a > 0$, používáme větu o translaci, kterou interpretujeme takto. Rozdělíme danou funkci na součet členů tvaru $F(p)\mathrm{e}^{-ap}$, kde k funkci $F(p)$ známe předmět. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak hledaný předmět k funkci $F(p)\mathrm{e}^{-ap}$ je funkce $f(t-a)\mathbf{1}(t-a)$, $t \ge 0$. Výraz e^{-ap} je pouze návěští, které nás upozorňuje na to, že v získaném předmětu provedeme posunutí. Ukážeme způsob výpočtu na příkladech.

Řešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap}.

Nalezněte předmět $f(t)$ k dané funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2p} + \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-3p}$

   Je $\frac{1}{p^2} \triangleq t$ a $\frac{1}{p} \triangleq 1$, tudíž pro předmět k funkci $F(p)$ dostaneme vyjádření

   $f(t) = (t-2)\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-3)$, $t \ge 0$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat

   $$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 2, \\ t-2, & 2 < t \le 3, \\ t-1, & t > 3. \end{array} \right.$$

2. $F(p) = \frac{2}{p(p-1)}\mathrm{e}^{-p}$

   Nejprve funkci $\frac{1}{p(p-1)}$ rozložíme na součet částečných zlomků. Dostaneme (viz odst. 2)

   $\frac{2}{p(p-1)} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p-1}$

   a tedy

   $f(t) = -2\mathbf{1}(t-1) + 2\mathrm{e}^{t-1}\mathbf{1}(t-1)$, $t \ge 0$,

   jestliže použijeme vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\mathrm{e}^t \triangleq \frac{1}{p-1}$ a větu o translaci ($a = 1$).

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2(\mathrm{e}^{t-1} - 1), & t > 1. \end{array} \right.$

3. $F(p) = \frac{2p - \mathrm{e}^{-\pi p}}{p^2+2p+2}$

   Obdobně jako v odstavci 2 dostaneme:

   $\frac{2p}{p^2+2p+2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2+1} - \frac{2}{(p+1)^2+1} \triangleq 2\mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t)$;

   $\frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{1}{(p+1)^2+1} \triangleq \mathrm{e}^{-t}\sin t$.

   Je tedy

   $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t)\mathbf{1}(t) - \mathrm{e}^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat

   $$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2\mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t), & 0 \le t \le \pi, \\ \mathrm{e}^{-t}(2\cos t - (2 - \mathrm{e}^{\pi})\sin t) + \sin t, & t > \pi. \end{array} \right.$$

4. $F(p) = \frac{3p+2-6\mathrm{e}^{-\pi p}}{p^2+4}$.

   Jestliže použijeme vzorců $\frac{p}{p^2+4} \triangleq \cos 2t$, $\frac{2}{p^2+4} \triangleq \sin 2t$ dostaneme, že

   $f(t) = [3\cos 2t + \sin 2t]\mathbf{1}(t) - 3\sin 2(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat

   $$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 3\cos 2t + \sin 2t, & 0 \le t \le \pi, \\ 3\cos 2t - 2\sin 2t, & t > \pi. \end{array} \right.$$

5. $F(p) = \frac{p-3\mathrm{e}^{-p}+2p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+3p+2}$.

   Obdobně jako v odstavci 2 provedeme rozklad na parciální zlomky a dostaneme:

   $\frac{p}{p^2+3p+2} = \frac{p}{(p+2)(p+1)} = \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1} \triangleq 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}$

   a

   $\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1} \triangleq -\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t}$.

   Odtud vyplývá, že

   $f(t) = (2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t})\mathbf{1}(t) + 3(\mathrm{e}^{-2(t-1)} - \mathrm{e}^{-(t-1)})\mathbf{1}(t-1) + (4\mathrm{e}^{-2(t-2)} - 2\mathrm{e}^{-(t-2)})\mathbf{1}(t-2)$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat vzorcem

   $$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}, & 0 \le t \le 1, \\ (2+3\mathrm{e}^2)\mathrm{e}^{-2t} - (1+3\mathrm{e})\mathrm{e}^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ (2+3\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}^4)\mathrm{e}^{-2t} - (1+3\mathrm{e}+2e^2)\mathrm{e}^{-t}, & t > 2. \end{array} \right.$$

Neřešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap}.

Nalezněte předmět $f(t)$ k obrazu $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2}{p^2}\mathrm{e}^{-p}$ $\quad [f(t) = 2(t-1)\mathbf{1}(t-1),\ t \ge 0]$

   $$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{lr} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2t-2, & t > 1. \end{array} \right. \right]$$

2. $F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - \mathrm{e}^{-p} - p\mathrm{e}^{-3p})$ $\quad [f(t) = 2t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) - 2\mathbf{1}(t-3),\ t \ge 0]$

   $$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{lr} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right. \right]$$

3. $F(p) = \frac{1}{p+1}(\mathrm{e}^{-p-1} - \mathrm{e}^{-2p-2})$ $\quad [f(t) = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2),\ t \ge 0]$

   $$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{lr} 0, & 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{e}^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right. \right]$$

4. $F(p) = \frac{1}{p^2+9}(3 - 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p} - (3+p)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}p})$

   $[f(t) = \sin 3t\mathbf{1}(t) - \left(\sin 3(t-\frac{\pi}{6}) + \cos 3(t-\frac{\pi}{6})\right)\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{6}) - \sin 3(t-\frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2}),\ t \ge 0]$

   $$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{lr} \sin 3t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \cos 3t, & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \right]$$

5. $F(p) = \frac{1}{(p^2+p)(p^2+4)}(1 + \mathrm{e}^{-\pi p})$ $\quad [f(t) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t)\mathbf{1}(t) +$
$(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t+\pi} - \frac{1}{20}\cos 2(t-\pi) - \frac{1}{10}\sin 2(t-\pi))\mathbf{1}(t-\pi),\ t \geq 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{lr} \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{\pi}) - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t, & t > \pi. \end{array} \right. \right]$$

5. Obraz periodické funkce.

Pomocí věty o translaci snadno odvodíme obraz periodické funkce. K jeho určení potřebujeme vypočítat obraz impulsu, který danou periodickou funkci vytváří.

Je-li $f_T : R \to R$ funkce, která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, T)$, pak je její periodické prodloužení definováno vztahem

$$f(t + kT) = f_T(t),\ 0 \leq t < T,$$

k je celé číslo.

Vztah lze přepsat ve tvaru

$$f(t) = f_T(t - kT),\ kT \leq t < (k+1)T,$$

k je celé číslo.

Periodické pokračování funkce $f(t)$ můžeme zapsat jako součet posunutých impulsů f_T, kdy provádíme posun vždy o jednu periodu. Je tedy

$$f(t)\mathbf{1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_T(t - kT)\mathbf{1}(t - kT),\ t \geq 0.$$

Odtud dostaneme pomocí věty o translaci vyjádření obrazu

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\mathbf{1}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_T(p)\mathrm{e}^{-pkT} = \frac{F_T(p)}{1 - \mathrm{e}^{-pT}},$$

kde $F_T(p) = \mathscr{L}\{f_T(t)\}$ je obraz impulsu $f_T(t)$. Použili jsme skutečnosti $\mathrm{e}^{-pkT} = (\mathrm{e}^{-pT})^k$ a toho, že součet geometrické řady s kvocientem e^{-pT} je roven $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$,

Obraz impulsu $F_T(t)$ počítáme buď podle definice ze vztahu

$$F_T(p) = \mathscr{L}\{f_T(t)\} = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,$$

nebo z vyjádření

$$f_T(t) = f(t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)],\ t \geq 0,$$

kde použijeme větu o translaci.

Řešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$, $0 \leq t < T$ a má periodu T.

1. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 < t < 2. \end{array} \right.$

Je $f_T(t) = \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2),\ t \geq 0$. Odtud a z věty o translaci plyne

$$F_T(p) = \frac{1}{p}(1 - 2\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p}),$$

tudíž

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p(1 - e^{-2p})} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p(1 + e^{-p})(1 - e^{-p})} = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 + e^{-p})}.$$

Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce, vztahu $\frac{1}{p} \triangleq 1$ a skutečnosti, že perioda dané funkce je $T = 2$.

2. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \sin t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{array} \right.$

   Je $f(t) = \sin t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)] = \sin t\mathbf{1}(t) + \sin(t - \pi)\mathbf{1}(t - \pi)$, tedy

$$F_T(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}e^{-\pi p}.$$

   Vzhledem k tomu, že perioda funkce $f(t)$ je rovna $T = 2\pi$, je

$$F(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2 + 1)(1 - e^{-2\pi p})} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - e^{-\pi p})}.$$

   Použili jsme vzorec pro obraz periodické funkce a vztahy $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

3. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2 - t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & 2 < t < 3. \end{array} \right.$

   Je $f_T(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)] + (2 - t)[\mathbf{1}(t - 1) - \mathbf{1}(t - 2)] =$
   $t\mathbf{1}(t) - [(t - 1) + 1]\mathbf{1}(t - 1) + [1 + (1 - t)]\mathbf{1}(t - 1) + (t - 2)\mathbf{1}(t - 2) =$
   $t\mathbf{1}(t) - 2(t - 1) + 1\mathbf{1}(t - 1) + (t - 2)\mathbf{1}(t - 2)$.
   Odtud dostaneme obraz $F_T(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$ a tedy obraz funkce $f(t)$ je

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2(1 - e^{-3p})}.$$

   Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce s periodou $T = 3$ a vztah $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

Neřešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T.

1. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \quad T = 2. \end{array} \right.$ $\qquad [F(p) = \frac{1}{(1+e^{-p})}]$

2. $f_T(t) = \sin t, \quad 0 \le t < \pi, \quad T = \pi$ $\qquad [F(p) = \frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}]$

3. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2 - t, & 1 < t \le 3, \\ t - 4, & 3 < t < 4, \quad T = 4. \end{array} \right.$ $\qquad [F(p) = \frac{1-2e^{-p}+2e^{-3p}-e^{-4p}}{p^2(1-e^{-4p})}]$

4. $f_T(t) = 1 - t, \quad 0 \le t < 1, \quad T = 1.$ $\qquad [F(p) = \frac{1}{p(1-e^{-p})} - \frac{1}{p^2}]$

6. Řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Laplaceovu tramsformaci můžeme použít k řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstatními koeficienty nebo jejich soustav. Pomocí vztahů mezi obrazem funkce a obrazem jejich derivací lze rovnici převést na lineární rovnici nebo soustavu lineárních rovnic pro obraz či obrazy řešení. Obrazem řešení obvykle bývá racionální funkce. Jak se hledá předmět k takové funkci jsme ukázali v odstavci 2. Obecně lze řešení zapsat jako konvoluci „ pravé strany rovnice “ a předmětu k racionální funkci.

Budeme hledat řešení diferenciální rovnice

$$(\clubsuit) \qquad x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

v intervalu $t \in \langle 0, \infty)$, které vyhovuje počáteční podmínce

$$(\spadesuit) \qquad x(0) = x_1,\ x'(0) = x_2, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_n.$$

Jestliže označíme

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(p),$$

pak

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = pX(p) - x_1,\ \mathscr{L}\{x''(t)\} = p^2 X(p) - px_1 - x_2, \ldots,$$
$$\mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p) - p^{n-1} x_1 - \ldots - x_n.$$

Po dosazení do rovnice $(\clubsuit)$ dostaneme rovnici pro obraz řešení ve tvaru

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) X(p) - Q(p) = \mathscr{L}\{f(t)\},$$

kde $Q(p)$ je nějaký polynom stupně nejvýše $(n-1)$. Odtud dostaneme obraz řešení ve tvaru

$$X(p) = \frac{\mathscr{L}\{f(t)\}}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} + \frac{Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Odtud lze vyjádřit řešení ve tvaru

$$x(t) = f(t) * v(t) + w(t),\ t \geq 0,$$

kde

$$v(t) \triangleq \frac{1}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} \quad \text{a} \quad w(t) \triangleq \frac{Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

jsou předměty k uvedeným racionálním funkcím. Je- li předmět $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$ racionální funkcí dostaneme řešení jako předmět k racionální funkci a není třeba využívat jeho vyjádření pomocí konvoluce. Je pak

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(p)}{P(p)}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{Q(p)}{P(p)}\},$$

kde $P(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$.

Poznamenejme, že z rozboru postupu vyplývá, že první člen ve vzorci je řešením rovnice $(\clubsuit)$ za nulových počátečních podmínek a druhý člen je řešením homogenní rovnice příslušné rovnici $(\clubsuit)$, které vyhovuje počátečním podmínkám $(\spadesuit)$.

Stejným způsobem můžeme řešit i rovnici tvaru $(\clubsuit)$, která obsahuje ještě člen tvaru $\int_0^t x(u) \mathrm{d}u$. Zde použijeme vztahu $\mathscr{L}^{-1}\{\int_0^t x(u)\mathrm{d}u\} = \frac{1}{p} X(p)$ a pro obraz řešení $X(p)$ dostaneme analogické vyjádření.

Obdobně můžeme postupovat při řešení soustav diferenciálních rovnic, kde dostaneme soustavu lineárních rovnic pro obrazy řešení. Po jejím vyřešení hledáme řešení soustavy jako předměty k funkcím výše popsaného tvaru.

Postup řešení jednotlivých úloh budeme ilustrovat na příkladech.

Řešené úlohy na diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení dané rovnice v intervalu $\langle 0, \infty)$, které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

1. $x' + 2x = 3, \quad x(0) = 0.$

   Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

   $pX(p) - 0 + 2X(p) = \frac{3}{p}.$

   Odtud vypočteme, že

   $X(p) = \frac{3}{p(p+2)}.$

   Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

   $$X(p) = \frac{3}{p(p+2)} = \frac{3}{2p} - \frac{3}{2(p+2)}.$$

   Odtud plyne, že

   $$x(t) = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t}),\ t \geq 0.$$

   Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ \mathrm{e}^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2}.$

2. $x' + 4x = \sin t, \quad x(0) = 3.$

   Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

   $X(p)(p+4) - 3 = \frac{2}{p^2+4}.$

   Odtud vypočteme, že

   $X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)}.$

   Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

   $$X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)} = \frac{3}{p+4} + \frac{\frac{1}{10}}{p+4} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{2}{5}}{p^2+4}.$$

   Odtud plyne, že

   $$x(t) = \frac{31}{10}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t,\ t \geq 0.$$

   Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4},\ \cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4},\ \mathrm{e}^{-4t} \triangleq \frac{1}{p+4}.$

3. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

   Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

   $p^2X(p) - p.1 - 0 - (pX(p) - 1) - 6X(p) = \frac{2}{p}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{p} + \frac{\frac{4}{5}}{p+2} + \frac{\frac{8}{15}}{p-3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{15}(-5 + 12\mathrm{e}^{-2t} + 8\mathrm{e}^{3t}),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\mathrm{e}^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = -2$, $a = 3$.

4. $x'' - 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = -4.$

   Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

   $(p^2X(p) - 2p + 4) - 6(pX(p) - 2) + 9X(p) = 0.$

   Odtud vypočteme, že

   $X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9}$.

   Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9} = \frac{2(p-3)+6-16}{(p-3)^2} = \frac{2}{(p-3)} - \frac{10}{(p-3)^2}.$$

   Odtud plyne, že

$$x(t) = (2 - 10t)\mathrm{e}^{3t},\ t \geq 0.$$

   Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $\mathrm{e}^{3t} \triangleq \frac{1}{p-3}$, $t\mathrm{e}^{3t} \triangleq \frac{1}{(p-3)^2}$.

5. $x'' + 2x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

   Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

   $(p^2X(p) - p - 2) + 2(pX(p) - 1) + 2X(p) = 0.$

   Odtud vypočteme, že

   $X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2}$.

   Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2} = \frac{p+1}{(p^2+1)+1} + \frac{3}{(p^2+1)+1}.$$

   Odtud plyne, že

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + 3\sin t),\ t \geq 0.$$

   Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -1$ a vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

6. $x'' - 9x = 2 - t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2 - 9)X(p) - 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^2(p-3)(p+3)}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{-\frac{6}{27}}{p} + \frac{\frac{1}{9}}{p^2} + \frac{\frac{7}{27}}{p-3} - \frac{\frac{1}{27}}{p+3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{27}(-6 + 3t + 7\mathrm{e}^{3t} - e^{-3t}),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p},\ t \triangleq \frac{1}{p^2},\ \mathrm{e}^{at} \triangleq \frac{1}{p-a},\ a = 3,\ a = -3.$

7. $x'' + 4x = 2\cos 2t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 4.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2 + 4)X(p) - 4 = \frac{2p}{p^2+4}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{4}{p^2+4} + \frac{2p}{(p^2+4)^2}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{2}(4 + t)\sin 2t,\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $t\sin 2t \triangleq \frac{4p}{(p^2+4)^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}.$

8. $x' + \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1, \quad x(0) = 1.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p + \frac{1}{p})X(p) - 1 = \frac{1}{p}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p+1}{p^2+1}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2.

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \sin t + \cos t,\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1},\ \cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}.$

9. $x' + 2x + 2\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 3\mathrm{e}^{-t}, \quad x(0) = 2.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p + 2 + \frac{2}{p})X(p) - 2 = \frac{3}{p+1}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{2p^2+5p}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p^2 + 5p}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{-3}{p+1} + \frac{5p+6}{p^2+2p+2}.$$

Úpravou dostaneme vyjádření

$$X(p) = \frac{-3}{p+1} + \frac{5(p+1)}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = -3\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}(5\cos t + \sin t),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$, $\mathrm{e}^{-t}f(t) \triangleq F(p+1)$ a vzorce $\mathrm{e}^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

10. $x' - x = f(t), \quad x(0) = -1,$ kde $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2-t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

Poznamenejme, že $f(t) = (2-t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)]$ a postupem z odstavce 3 dostaneme

$$f(t) \triangleq \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - \mathrm{e}^{-2p}).$$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p-1)X(p) + 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - \mathrm{e}^{-2p}).$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{-p^2 + 2p - 1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p^2(p-1)}\mathrm{e}^{-2p}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkce rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right)\mathrm{e}^{-2p}.$$

Použijeme postupů, které jsme probrali v úlohách v odstavcích 2 a 4 a dostaneme pro řešení vzorec

$$x(t) = (t-1)\mathbf{1}(t) + (-1 - (t-2) + \mathrm{e}^{(t-2)})\mathbf{1}(t-2),\ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t-1, & 0 \le t \le 2, \\ \mathrm{e}^{t-2}, & t > 2. \end{array} \right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\mathrm{e}^t \triangleq \frac{1}{p-1}$.

11. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = -1,$ kde $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{array} \right.$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t) = \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-p})$.

Dále vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2-p+1-\mathrm{e}^{-p}}{p(p^2+1)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \right) \mathrm{e}^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (1 - \sin t)\mathbf{1}(t) - (1 - \cos(t-1))\mathbf{1}(t-1),\ t \ge 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \left\langle \begin{array}{cl} 1 - \sin t, & 0 \le t \le 1, \\ \sin t(\sin 1 - 1) + \cos t \cos 1, & t > 1. \end{array} \right.$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^+1}$.

12. $x'' + 4x' + 3x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0,$ kde $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 0. \end{array} \right.$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t) = (1 - \mathrm{e}^{-p})\frac{1}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$X(p)(p^2+4p+3) = (1 - \mathrm{e}^{-p})\frac{1}{p}$.

Dále vypočteme, že

$X(p) = \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p(p^2+4p+3)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{6(p+3)} \right)(1 - \mathrm{e}^{-p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathbf{1}(t)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(t-1)}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3(t-1)}\right)\mathbf{1}(t-1),\ t\geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\left\langle \begin{array}{cl} \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}, & 0\leq t\leq 1,\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}(1-e^{3})\mathrm{e}^{-3t}, & t>1. \end{array}\right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t)\triangleq X(p)-x(0)$, $x''(t)\triangleq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1\triangleq\frac{1}{p}$, $\mathrm{e}^{at}\triangleq\frac{1}{p-a}$, $a=-1$, $a=-3$.

13. $x''+x=f(t),\quad x(0)=0,\ x'(0)=0,$ kde $f(t)=\left\langle \begin{array}{rl} 1, & 0\leq t\leq 1,\\ -1, & 1<t\leq 2,\\ 0, & t>2. \end{array}\right.$

Poznamenejme, že $f(t)=\mathbf{1}(t)-2\mathbf{1}(t-1)+\mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathscr{L}f(t)=\frac{1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavcích 3.

Označme $X(p)\triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici
$(p^2+1)X(p)=\frac{1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}}{p}$.
Dále vypočteme, že
$X(p)=\frac{1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}}{p(p^2+1)}$.
Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 5, 6 a 12. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p)=\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)(1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=(1-\cos t)\mathbf{1}(t)-2(1-\cos(t-1))\mathbf{1}(t-1)+(1-\cos(t-2))\mathbf{1}(t-2),\ t\geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\left\langle \begin{array}{cl} 1-\cos t, & 0\leq t\leq 1,\\ -1+(2\cos 1-1)\cos t+2\sin 1\sin t, & 1<t\leq 2,\\ \cos t(2\cos 1-1-\cos 2)-(\sin 2-2\sin 1)\sin t, & t>2. \end{array}\right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t)\triangleq X(p)-x(0)$, $x''(t)\triangleq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, větu o translaci z odstavce 8 a vzorce $1\triangleq\frac{1}{p}$, $\sin t\triangleq\frac{1}{p^2+1}$, $\cos t\triangleq\frac{p}{p^2+1}$.

14. $x''+2x'+2x=f(t),\quad x(0)=0,\ x'(0)=0,$ kde $f(t)=\left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0\leq t\leq 1,\\ \mathrm{e}^{-t}, & t>1. \end{array}\right.$

Poznamenejme, že $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\mathbf{1}(t-1)=\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t)=\frac{\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-p}}{p+1}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p)\triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+2p+2)X(p) = \frac{\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-p}}{p+1}$.

Dále vypočteme, že

$X(p) = \frac{\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-p}}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)\mathrm{e}^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-(t-1)}\cos(t-1))\mathbf{1}(t-1),\ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t}(\cos 1 \cos t + \sin 1 \sin t), & t > 1. \end{array} \right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\mathrm{e}^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$ a vztah $f(t)\mathrm{e}^{-t} \triangleq F(p+1)$.

15. $x''+4x = f(t), \quad x(0)=0,\ x'(0)=0,$ kde $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2(t-2), & 1 < t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

Poznamenejme, že $f(t) = 2t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)) + 2(t-2)(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)) = 2t\mathbf{1}(t) - 4(t-1)\mathbf{1}(t-1) + 2(t-2)\mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathscr{L}f(t) = (1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p})\frac{2}{p^2}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+4)X(p) = (1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p})\frac{2}{p^2}$.

Dále vypočteme, že

$X(p) = (1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p})\frac{2}{p^2(p^2+4)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right)\frac{1-2\mathrm{e}^{-p}+\mathrm{e}^{-2p}}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathbf{1}(t) - \left[(t-1) - \frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1) +$$

$$\frac{1}{2}\left[(t-2) - \frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\mathbf{1}(t-2),\ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2}t + \sin 2t(\frac{1}{2}\cos 2 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\sin 2\cos 2t, & 1 < t \leq 2, \\ \sin 2t(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2 - \frac{1}{4}\cos 4) + (\frac{1}{4}\sin 4 - \frac{1}{2}\sin 2)\cos 2t, & t > 2. \end{array} \right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$,
$\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

16. $x' + 5x = f(t), \quad x(0) = 1,$ kde $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 5\cos 2t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

Poznamenejme, že

$$f(t) = 5\cos 2t\,[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] = 5\cos 2t\,\mathbf{1}(t) + 5\cos 2(t - \frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}),$$

tedy $\mathscr{L}f(t) = \frac{5p}{p^2+4}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 2.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici
$(p+1)X(p) - 1 = \frac{5p}{p^2+4}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p})$.
Dále vypočteme, že
$X(p) = \frac{5p}{(p^2+4)(p+1)}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}p}) + \frac{1}{p+1}$.
Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+4} + \left(\frac{p+4}{p^2+4} - \frac{1}{p+1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (\cos 2t + 2\sin 2t)\mathbf{1}(t) + \left(\cos 2(t - \frac{\pi}{2}) + 2\sin 2(t - \frac{\pi}{2}) - \mathrm{e}^{-(t-\frac{\pi}{2})}\right)\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}),\ t \ge 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \cos 2t + 2\sin 2t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq pX(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce
$\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\mathrm{e}^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$.

Řešení rovnice se dá také vyjádřit jako konvoluce. Toto vyjádření můžeme použít ve dvou případech. Buď je funkce na pravé straně rovnice složitá pro hledání obrazu a nebo chceme vyjádřit řešení rovnice pro obecnou pravou stranu. Při výpočtu konkrétního řešení pak zbývá vypočítat integrál, kterým je konvoluce zapsaná. Využijeme vztahu $\mathscr{L}^{-1}\{F(p)G(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} * \mathscr{L}^{-1}\{G(p))\}$. Dostaneme stejné vyjádření řešení, které získáme metodou variace konstant. Postup řešení úlohy budeme ilustrovat na příkladech.

17. $x'' + 3x' + 2x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 3p + 2)X(p) = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 3p + 2}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \triangleq (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}),$$

je

$$x(t) = f(t) * (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) = \int_0^t f(u)(\mathrm{e}^{-t+u} - \mathrm{e}^{-2t+2u})\,\mathrm{d}u,\ t \geq 0.$$

18. $x'' + 4x' + 5x = f(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2+4p+5)X(p) - p - 4 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2+4p+5} + \frac{p+4}{p^2+4p+5}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2+4p+5} = \frac{1}{(p+2)^2+1} \triangleq \mathrm{e}^{-2t}\sin t$$

a

$$\frac{p+4}{p^2+4p+5} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1} \triangleq \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$$

je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + f(t) * \mathrm{e}^{-2t}\sin t$$

$$= \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + \int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-2(t-u)}\sin(t-u)\,\mathrm{d}u,\ t \geq 0.$$

19. $x' + 2x + 10\int_0^t x(u)\mathrm{d}u = f(t), \quad x(0) = 1,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 2 + \frac{10}{p})X(p) - 1 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{pF(p)}{p^2+2p+10} + \frac{p}{p^2+2p+10}.$$

Protože je

$$\frac{p}{p^2+2p+10} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - \frac{1}{(p+1)^2+9} \triangleq \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t),$$

je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t) + f(t) * \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t)$$

$$= \mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t) + \int_0^t f(u)\mathrm{e}^{-t+u}(\cos 3(t-u) - \frac{1}{3}\sin 3(t-u))\mathrm{d}u,\ t \geq 0.$$

20. $x' + 6x + 9\int_0^t x(u)\mathrm{d}u = f(t), \quad x(0) = 1,$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 6 + \frac{9}{p})X(p) - 1 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{pF(p)}{p^2 + 6p + 9} + \frac{p}{p^2 + 6p + 9}.$$

Protože je

$$\frac{p}{p^2 + 6p + 9} = \frac{p}{(p+3)^2} = \frac{1}{p+3} - \frac{3}{(p+3)^2} \triangleq \mathrm{e}^{-3t}(1 - 3t),$$

je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3t}(1 - 3t) + f(t) * (\mathrm{e}^{-3t}(1 - 3t)) =$$
$$\mathrm{e}^{-3t}(1 - 3t) + \int_0^t f(u)(\mathrm{e}^{-3(t-u)}(1 - 3(t-u)))\mathrm{d}u, \ t \geq 0.$$

Neřešené úlohy na diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení rovnice, které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

1. $x' + 3x = 0, \quad x(0) = 5;$ $\quad [x(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}, \ t \geq 0]$

2. $x'' - 2x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 1;$ $\quad [x(t) = \mathrm{e}^t \cos t, \ t \geq 0]$

3. $x'' + 3x' + 2x = 4\mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0;$ $\quad [x(t) = 2\mathrm{e}^{-3t} - 4\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t}, \ t \geq 0]$

4. $x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{-2t} - \cos t + 2\sin t), \ t \geq 0]$

5. $x'' + 3x' = \mathrm{e}^{-t}, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = -1;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t}), \ t \geq 0]$

6. $x'' + 4x = \cos t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t), \ t \geq 0]$

7. $x'' + 2x' = t\sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0;$
$[x(t) = \frac{1}{25}(2\mathrm{e}^{-2t} - 10t\cos t - 5t\sin t - 2\cos t + 14\sin t), \ t \geq 0]$

8. $x'' + 2x' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{2}(t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} - \cos t), \ t \geq 0]$

9. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)), \ t \geq 0]$

10. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, \ x'(0) = 1;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \cos t + \sin t, \ t \geq 0]$

11. $x' + 5x + 6\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad x(0) = 1;$ $\quad [x(t) = 3\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-2t}, \ t \geq 0]$

12. $x' + 2x + \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin t, \quad x(0) = 0;$ $\quad [x(t) = \frac{1}{2}(t\mathrm{e}^{-t} + \sin t), \ t \geq 0]$

13. $x' = -x + y + \mathrm{e}^t, \quad x(0) = 0,$ $\quad [x(t) = \mathrm{e}^t - 1, \ t \geq 0]$
$y' = x - y + \mathrm{e}^t, \quad y(0) = 0;$ $\quad [y(t) = \mathrm{e}^t - 1, \ t \geq 0]$

14. $x' = -y, \quad x(0) = 1,$ $\quad [x(t) = \mathrm{e}^t(\cos t - 2\sin t), \ t \geq 0]$
$y' = 2x + 2y, \quad y(0) = 1;$ $\quad [y(t) = \mathrm{e}^t(\cos t + 3\sin t), \ t \geq 0]$

15. $x' = -x + 3y, \quad x(0) = 1,$ $\quad [x(t) = \frac{19}{16}\mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{4}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{16}\mathrm{e}^{-2t}, \ t \geq 0]$
$y' = x + y + \mathrm{e}^{-2t}, \quad y(0) = 1;$ $\quad [y(t) = \frac{19}{16}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-2t} - \frac{3}{16}\mathrm{e}^{-2t}, \ t \geq 0]$

16. $x'' - 4x = 4t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = \frac{1}{4}(3e^{2t} + e^{-2t} - 4t),\ t \geq 0]$

17. $x'' - 4x = 4e^{2t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t},\ t \geq 0]$

18. $x'' + x = t^3 + 6t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = t^3,\ t \geq 0]$

19. $x'' + x = \sin 2t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = \frac{1}{3}(2\sin t - \sin 2t),\ t \geq 0]$

20. $x'' + x = \cos t + \sin 2t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = \frac{1}{6}((3t+4)\sin t - 2\sin 2t),\ t \geq 0]$

21. $x'' + x = 2 + e^{-t}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = \frac{1}{2}(4 + e^{-t} + \sin t - 5\cos t),\ t \geq 0]$

22. $x' + 6x + 9\int_0^t x(\tau)\,d\tau = 0, \quad x(0) = 1;$ $\qquad [x(t) = (1 - 3t)e^{-3t},\ t \geq 0]$

23. $x' + 2x + 2\int_0^t x(\tau)\,d\tau = 0, \quad x(0) = 1;$ $\qquad [x(t) = e^{-t}\cos t,\ t \geq 0]$

24. $x' - 2x = f(t), \qquad x(0) = -3; \qquad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 8 - 4t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

$$[x(t) = (2t-3)\mathbf{1}(t) + (e^{2(t-2)} - 2t + 3)\mathbf{1}(t-2),\ t \geq 0]$$
$$[x(t) = 2t - 3,\ 0 \leq t \leq 2,\ x(t) = e^{2(t-2)},\ t > 2]$$

25. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1; \qquad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array} \right.$

$$[x(t) = (t - \cos t)\mathbf{1}(t) - (t + \sin t + \pi\cos t)\mathbf{1}(t - \pi),\ t \geq 0]$$
$$[x(t) = t + \cos t,\ 0 \leq t \leq \pi,\ x(t) = \cos t - \sin t - \pi\cos t,\ t > \pi]$$

26. $x'' + 4x = f(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0; \quad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & t > \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$

$$\left[x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{4}(3\cos 2t + 1), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{4}(2 + 3\cos 2t - \sin 2t), & t > \frac{\pi}{4}. \end{array} \right. \right]$$

27. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -1; \quad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2e^{-t}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

$$\left[x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} e^{-t} - \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos t + e^{-\frac{\pi}{2}}(\cos t + \sin t), & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \right]$$

28. $x' + 3x = f(t), \quad x(0) = 1; \quad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 9t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 9, & t > 1. \end{array} \right.$

$$\left[x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2e^{-3t} - 1 + 3t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2e^{-3t} + 3 - e^3 e^{-3t}, & t > 1. \end{array} \right. \right]$$

29. $x' - x = f(t), \quad x(0) = 1; \quad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 5\sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

$$\left[x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 3e^t - 2\cos 2t - \sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3e^t + 2e^{t - \frac{\pi}{2}}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \right]$$

30. $x'' + 9x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0; \quad f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array} \right.$

$$\left[x(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{24}(3\sin t - \sin 3t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array} \right. \right]$$

31. $x'' + 2x' + 10x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 6;$ $\qquad [x(t) = 2e^{-t}\sin 3t,\ t \geq 0]$

32. $x'' + 2x' = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2;$ $\qquad [x(t) = 2 - \mathrm{e}^{-2t},\ t \geq 0]$

33. $x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0;$ $\qquad [x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t},\ t \geq 0]$

34. $x'' - x' = 2 - 2t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1;$ $\qquad [x(t) = \mathrm{e}^{t} + t^2,\ t \geq 0]$

35. $x'' + x = 4\mathrm{e}^{t}, \quad x(0) = 4,\ x'(0) = -3;$ $\qquad [x(t) = 2\mathrm{e}^{t} + 2\cos t - 5\sin t,\ t \geq 0]$

36. $x'' + x = 3\sin 2t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1;$ $\qquad [x(t) = \cos t + 3\sin t - \sin 2t,\ t \geq 0]$

37. $x'' + 9x = 5\cos 3t, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = -1;$ $\qquad [x(t) = 2\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{5}{6}t\sin 3t,\ t \geq 0]$

38. $x'' + x' = 2t - 3, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1;$ $\qquad [x(t) = 6(1 - \mathrm{e}^{-t}) + t^2 - 5t,\ t \geq 0]$

39. $x'' + 6x' + 9x = (2t + 1)\mathrm{e}^{t}, \quad x(0) = 5,\ x'(0) = \frac{1}{8};$ $\qquad [x(t) = 5\mathrm{e}^{-3t} + 15t\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{8}t\mathrm{e}^{t},\ t \geq 0]$