$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}\,, \tag{2.5.25}$$

odkud plyne **zákon zachování momentu hybnosti:**

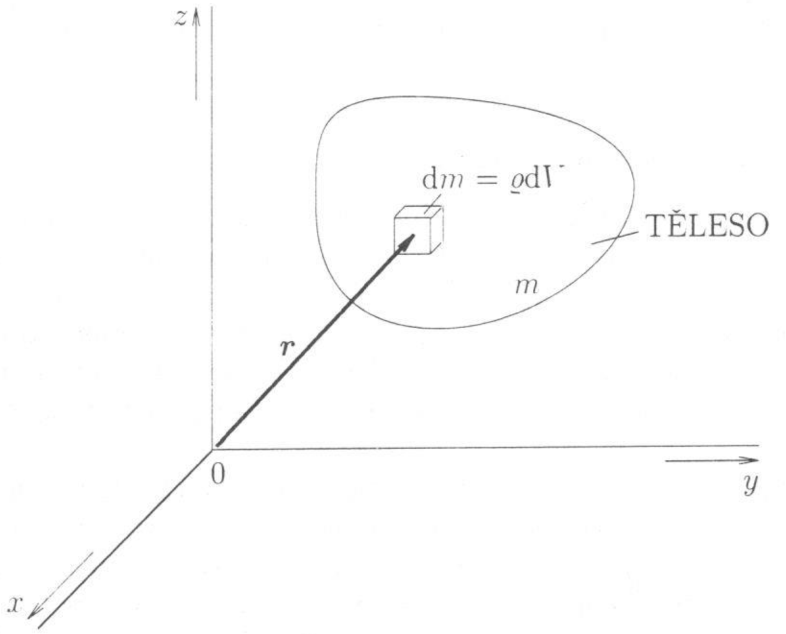
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{konst}. \tag{2.5.26}$$

**podle nějž je v izolované soustavě celkový moment hybnosti konstantní.**

Zákon zachování momentu hybnosti je třetím ze **zákonů zachování** v klasické mechanice. Pro trojici fyzikálních veličin hybnost, energii a moment hybnosti platí zákony zachování v izolované soustavě jak v makro-, tak v mikrosvětě. Jsou důsledkem základních vlastností prostoru a času, homogenity a izotropie. Součiny hybnosti a délky, a energie a času, mají stejné rozměry jako moment hybnosti. Představují fyzikální veličinu, nazvěme ji **akce**, která je jakousi nejobecnější mírou pohybu, danou změnou hybnosti v určité části prostoru a přeměnou energie v nějakém časovém intervalu. V kvantové fyzice se s ní setkáváme v relacích neurčitosti. Také Planckova konstanta $h$ má rozměr akce.

## 2.6 Dynamika tuhého tělesa

Až dosud jsme vyšetřovali pohyb těles, jejichž rozměry jsou relativně tak malé, že je můžeme považovat za hmotné body. Předpokládejme nyní, že hmotnost tělesa je rozložena v tak velkém objemu, že představu hmotného bodu již nelze použít.




Obrázek 2.6.1

Abychom mohli pro řešení dynamiky takového tělesa použít výsledků, ke kterým jsme dospěli v předchozí kapitole, rozdělíme těleso na dostatečně malé elementy, jež lze se zvolenou přesností považovat za hmotné body (obr. 2.6.1). Je-li objem elementárního tělesa $\mathrm{d}V$, pak jeho hmotnost je

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V\,.$$

kde

$$\varrho = \varrho(\boldsymbol{r})$$

je hustota tělesa v místě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$, v němž jsme vytkli hmotný element $\mathrm{d}m$ o objemu $\mathrm{d}V$. Jednotkou hustoty je zřejmě

$$[\varrho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}\,.$$

Celková hmotnost tělesa $m$ je pak rovna součtu hmotností všech elementů, který v limitním případě přechází v integrál přes celý objem tělesa $V$

$$m = \iiint\limits_V \varrho\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.6.1}$$

Tento integrál popisuje těleso jako kontinuální soustavu hmotných elementů. Tuhé těleso je pak takové těleso, jehož objem ani tvar se nemění působením vnějších sil (respektive změna tvaru je zanedbatelná). To znamená, že vzájemné vzdálenosti hmotných bodů tuhého tělesa se nemění.

Poloha tuhého tělesa je určena polohou tří jeho bodů, které neleží na jedné přímce. Polohu prvního bodu určíme třemi souřadnicemi, první bod má tedy 3 stupně volnosti. Při jeho pevné poloze se druhý bod může pohybovat pouze po kulové ploše, má tedy dva stupně volnosti. Jsou-li první dva body pevně stanoveny 5 souřadnicemi, má třetí bod již jen jeden stupeň volnosti, který odpovídá rotaci kolem osy, určené prvním a druhým bodem. Tuhé těleso má tedy maximálně šest stupňů volnosti. Je-li ovšem ve svém pohybu nějak omezeno (je-li podrobeno vazbám), je počet jeho stupňů volnosti menší, jak plyne z rozboru rovnic (2.1.1) - (2.1.4).

### 2.6.1 Translace a rotace tuhého tělesa

Pohyb tuhého tělesa je složitější než pohyb hmotného bodu, protože se může při přemísťování také otáčet. Rozeznáváme dva základní typy pohybu tuhého tělesa, translaci a rotaci.

**Translace** (posuvný pohyb) je takový pohyb, při němž libovolná přímka pevně spojená s tělesem zachovává v prostoru stále svůj směr. Dráhy všech bodů mají stejný tvar a v libovolném okamžiku se všechny elementární hmotné body tělesa pohybují touž okamžitou rychlostí.

**Rotace** tělesa je takový pohyb, při němž zůstává v klidu buď jediná přímka v tělese - rotace kolem pevné osy, nebo se poloha přímky, která zůstává v klidu, časově mění - rotace kolem okamžité osy. Při rotaci kolem pevné osy zůstávají body tělesa ležící na ose rotace v klidu, každý jiný bod tělesa opisuje kružnici, která leží v rovině proložené uvažovaným bodem kolmo na osu rotace a jejíž střed leží na ose rotace. Všechny body tělesa konají tedy kruhový pohyb. Jejich obvodové rychlosti závisejí na jejich vzdálenosti od osy rotace, jejich úhlová rychlost je pro všechny body tělesa stejná a nazývá se **úhlová rychlost** tělesa. Úhlová rychlost jako vektor je určena rovnicí (2.1.44), tj.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{b}^o\,. \tag{2.6.2}$$

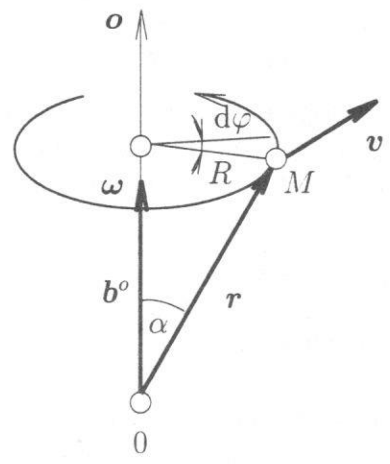
Rychlost $\boldsymbol{v}$ kteréhokoliv bodu rotujícího tělesa můžeme pro případ, že osa rotace prochází počátkem souřadnicového systému, vypočítat (obr. 2.6.2) podle vztahu (2.1.45), tj.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,. \tag{2.6.3}$$

Vektor úhlového zrychlení definovaný vztahem (2.1.44)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\, \boldsymbol{b}^o$$

má potom při rotaci tělesa kolem pevné osy směr osy rotace. Je-li jeho orientace souhlasná s orientací $\boldsymbol{\omega}$, jde o zrychlenou rotaci, je-li opačná, jde o rotaci zpomalenou. Je-li tuhé těleso




Obrázek 2.6.2

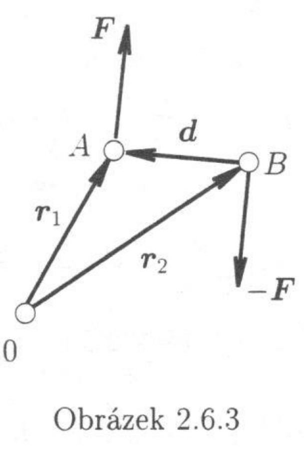
upevněno v jednom bodě, může konat rotaci kolem tohoto pevného bodu. Každý jeho bod se pak může pohybovat po kulové ploše se středem v pevném bodě. V tomto případě osa rotace, která prochází pevným bodem, nemá již pevnou polohu v prostoru, ale mění svůj směr - hovoříme také o okamžité ose rotace.

Dá se ukázat, že každé elementární přemístění tělesa můžeme vyjádřit jednou translací a jednou rotací. Proto lze každý skutečný pohyb tělesa rozdělit na dva současně probíhající pohyby: translaci a rotaci kolem okamžité osy.

Obecným pohybem tuhého tělesa se v tomto skriptu zabývat nebudeme. Omezíme se jen na translační pohyb a pohyb rotační kolem pevné osy. Dříve však vyšetříme některé vlastnosti sil, působících na tuhé těleso, abychom mohli stanovit výslednici těchto sil.

## 2.6.2 Silová dvojice

Dvě rovnoběžné síly stejně veliké a opačné orientace se nazývají **silová dvojice**. Zvolme




Obrázek 2.6.3

libovolný bod 0 (obr. 2.6.3) a označme polohové vektory působišť sil $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$ pořadě $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$. Výsledný moment těchto sil je podle (2.5.21) a (2.5.19)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F} .$$

Vektor $\boldsymbol{d}$ je orientován od působiště síly $-\boldsymbol{F}$ k působišti síly $\boldsymbol{F}$ a nazývá se **rameno silové dvojice**. Je patrné, že výsledný moment obou sil

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{F} , \tag{2.6.4}$$

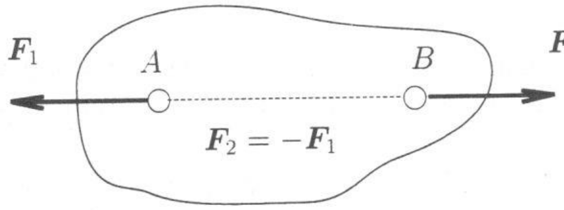
který nazýváme **moment silové dvojice**, nezávisí na volbě momentového bodu 0 . Je to tzv. volný vektor kolmý k rovině obou sil. Jeho působiště není pevně stanoveno, při grafickém znázornění je zpravidla pokládáme do středu ramene dvojice.

### 2.6.3 Pravidla pro skládání sil

Uvedeme tři základní pravidla pro skládání sil.

a) Budou-li ve dvou různých bodech tuhého tělesa působit dvě síly, které leží v téže přímce, jsou stejně veliké a mají opačnou orientaci (obr. 2.6.4), pak navzájem se ruší, takže nemají na těleso žádný dynamický účinek.

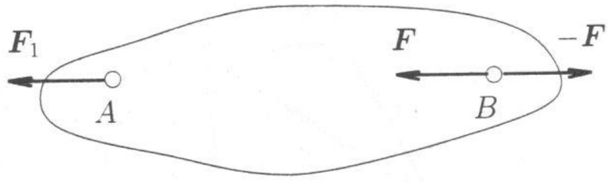
b) Předpokládejme dále, že v bodě $A$ tuhého tělesa působí síla $\boldsymbol{F}_1$ (obr. 2.6.5). Na vektorové přímce síly $\boldsymbol{F}_1$ zvolme bod $B$ a v něm zvolme síly $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1$ a $-\boldsymbol{F}$. Tyto dvě síly se ruší a tedy všechny tři síly jsou ekvivalentní jediné síle $\boldsymbol{F}_1$, působící v bodě $A$. Podle toho, co bylo výše




Obrázek 2.6.4

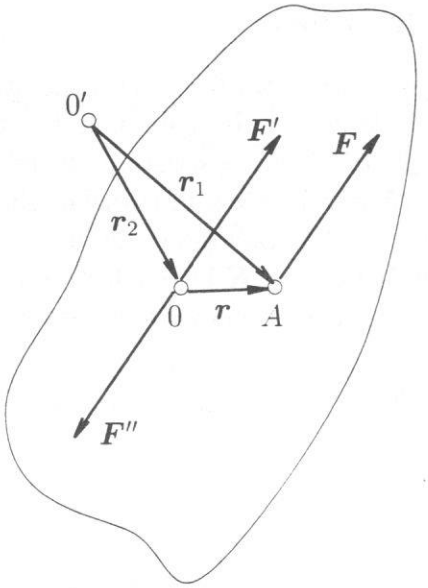
řečeno, můžeme také vzájemně zrušit sílu $\boldsymbol{F}_1$ v bodě $A$ a $-\boldsymbol{F}$ v bodě $B$ a zbývá potom jako výsledná síla, která na těleso působí, síla $\boldsymbol{F}(= \boldsymbol{F}_1)$ v bodě $B$. Působiště každé síly, působící na tuhé těleso, můžeme tedy posunout po vektorové přímce do libovolného bodu, aniž se změní její dynamický účinek na těleso.

c) Působí-li v bodě $A$ tuhého tělesa síla $\boldsymbol{F}$, můžeme ji rovnoběžně posunout do libovolného




Obrázek 2.6.5

bodu 0 tělesa tak, že v bodě 0 připojíme dvě síly $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}''$ rovnoběžné s $\boldsymbol{F}$, které jsou stejně veliké, ale opačně orientované ($\boldsymbol{F}'' = -\boldsymbol{F}', |\boldsymbol{F}'| = |\boldsymbol{F}''| = |\boldsymbol{F}|$). Viz vlastnost a) a (obr. 2.6.6).




Obrázek 2.6.6

Vedle přenesené síly $\boldsymbol{F}'$ zbývají nám nyní dvě stejně velké síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}''$, které jsou rovnoběžné, opačné orientace a působí na těleso v různých působištích. Tyto dvě síly vytvářejí silovou dvojici, jejíž moment $\boldsymbol{M}$ vzhledem k libovolnému bodu $0'$ je dán vektorovým součtem momentů obou sil k tomuto bodu (viz obr. 2.6.6)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{F}'') = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\,. \tag{2.6.5}$$

(neboť $\boldsymbol{F}'' = -\boldsymbol{F}$). Je tedy moment této dvojice sil nezávislý na volbě vztažného bodu 0. Tato silová dvojice, která vzniká posunutím síly v tuhém tělese, se nazývá **doplňková dvojice sil**.

Můžeme tedy v tuhém tělese každou sílu rovnoběžně posunout do libovolného bodu tělesa, musíme však vždy připojit doplňkovou dvojici sil, jejíž moment je podle (2.6.4) co do směru i velikosti roven momentu původní síly vzhledem k jejímu novému působišti. Vektor doplňkové dvojice sil můžeme také rovnoběžně přenést do libovolného místa v tuhém tělese.

Působí-li na tuhé těleso soustava sil $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ v různých působištích o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ vzhledem k referenčnímu bodu 0 tělesa, lze každou sílu $\boldsymbol{F}_i$ nahradit silou $\boldsymbol{F}_i'$ ($\boldsymbol{F}_i' = \boldsymbol{F}_i$), posunutou do bodu 0, a doplňkovou silovou dvojicí s momentem $\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$. Všechny přenesené síly působí v bodě 0 a lze je tedy vektorově sečíst:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\,. \tag{2.6.6}$$

Působiště výslednice $\boldsymbol{R}$ je rovněž v bodě 0. Momenty $\boldsymbol{M}_i$ doplňkových silových dvojic lze přenést do libovolného bodu tělesa a tam je vektorově sečíst ve výslednou dvojici sil, jejíž moment je

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\,. \tag{2.6.7}$$

Je-li působiště výsledné síly $\boldsymbol{R}$ ve středu hmotnosti tuhého tělesa, projeví se působení této síly změnou rychlosti translačního pohybu tělesa. Je-li výsledný moment působících sil $\boldsymbol{M}$ nenulový, projeví se působení tohoto momentu změnou úhlové rychlosti rotačního pohybu tělesa.

## 2.6.4 Rovnováha tuhého tělesa

Hledejme nyní podmínky, za nichž setrvává tuhé těleso, umístěné v dané inerciální soustavě, v translačním i rotačním klidu. Takový stav budeme nazývat **rovnováha tuhého tělesa**. V předchozím odstavci jsme ukázali, že obecnou soustavu sil působících na těleso lze nahradit jedinou výslednicí $\boldsymbol{R}$ (2.6.6), která vyvolává vznik translačního pohybu, a jedinou dvojicí sil, jejíž moment $\boldsymbol{M}$ (2.6.7) vyvolává vznik rotačního pohybu tuhého tělesa. Má-li tedy být tuhé těleso v rovnováze, musejí být výslednice sil $\boldsymbol{R}$ i výslednice momentů sil $\boldsymbol{M}$ nulové. Ze vztahů (2.6.6) a (2.6.7) dostáváme tak podmínky rovnovážného stavu tuhého tělesa:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}\,, \quad \text{(rovnováha sil)} \tag{2.6.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}\,, \quad \text{(rovnováha momentů)} \tag{2.6.9}$$

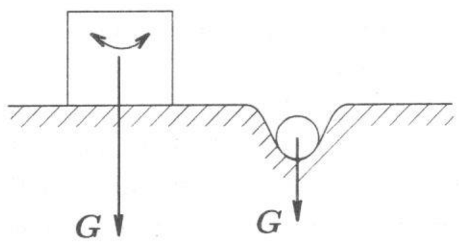
(Rovnováha momentů je nezávislá na volbě počátku 0 polohových vektorů $\boldsymbol{r}_i$.)

Obě podmínky rovnováhy mají vektorový tvar a dají se tedy rozepsat do šesti podmínek složkových.

Vychýlíme-li těleso z jeho rovnovážné polohy, změní se obecně rozložení sil, které na těleso působí, a podmínky rovnováhy již nemusejí být splněny.

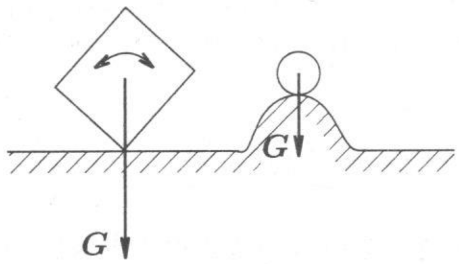
Rozlišujeme tři případy rovnováhy:

1. **Stabilní rovnováha** (obr. 2.6.7).
   Při vychýlení tělesa ze stabilní rovnovážné polohy vzniká moment vnějších sil, který se snaží těleso vrátit do původní rovnovážné polohy.



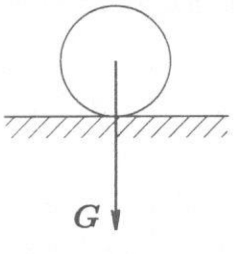

Obrázek 2.6.7

2. **Labilní rovnováha** (obr. 2.6.8).
   Při vychýlení tělesa z labilní rovnovážné polohy se vytvoří takový moment vnějších sil, který se snaží těleso dále vychylovat z rovnovážné polohy.




Obrázek 2.6.8

3. **Indiferentní rovnováha** (obr. 2.6.9).
Po vychýlení tělesa z indiferentní rovnovážné polohy zůstávají splněny podmínky rovnováhy, takže těleso je v rovnováze i v nové poloze.



Obrázek 2.6.9

## 2.6.5 Těžiště a střed hmotnosti

Hledejme působiště tíhové síly tuhého tělesa v homogenním tíhovém poli. Rozložme těleso na hmotné elementy $dm$. V homogenním tíhovém poli působí na každý element tíhová síla

$$\mathrm{d}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}m\,.$$

Výslednici $\boldsymbol{G}$ elementárních sil $\mathrm{d}\boldsymbol{G}$ získáme jejich integrací přes celý objem tělesa $V$

$$\boldsymbol{G} = \iiint_V \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \iiint_V \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}m = \boldsymbol{g}\iiint_V \mathrm{d}m = m\boldsymbol{g}\,.$$

Působiště tíhové síly $\boldsymbol{G}$ se nazývá **těžiště tělesa**. Polohový vektor těžiště $\boldsymbol{r}^*$ lze vyjádřit pomocí podmínky rovnosti momentu síly $\boldsymbol{G}$ a integrálu jednotlivých momentů sil $\mathrm{d}\boldsymbol{G}$ vztažených k libovolnému bodu (pro jednoduchost třeba k počátku souřadnicové soustavy). Potom

$$\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{G} = \iiint_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}m\,.$$

což lze upravit na tvar

$$m\,\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{g} = \iiint_V \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m \times \boldsymbol{g}\,.$$

Protože tato rovnice platí pro libovolné otočení tělesa vzhledem ke směru vektoru $\boldsymbol{g}$, platí

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{1}{m}\iiint_V \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\,. \tag{2.6.10}$$

Poloha těžiště tělesa je totožná s polohou jeho středu hmotnosti (2.5.7), kde pro tuhé těleso přejde suma v integrál. Polohový vektor těžiště lze také vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{1}{m}\iiint_V \varrho\,\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V\,,$$

kde $\varrho$ je hustota tělesa. Pokud je těleso homogenní, tj. $\varrho = konst.$, zjednoduší se vyjádření polohového vektoru těžiště na tvar

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{1}{V} \iiint\limits_V \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V \,, \tag{2.6.11}$$

Souřadnice středu hmotnosti a těžiště homogenního tělesa v homogenním tíhovém poli potom jsou:

$$x^* = \frac{1}{V} \iiint\limits_V x \, \mathrm{d}V \,, \; y^* = \frac{1}{V} \iiint\limits_V y \, \mathrm{d}V \,, \; z^* = \frac{1}{V} \iiint\limits_V z \, \mathrm{d}V \,. \tag{2.6.12}$$

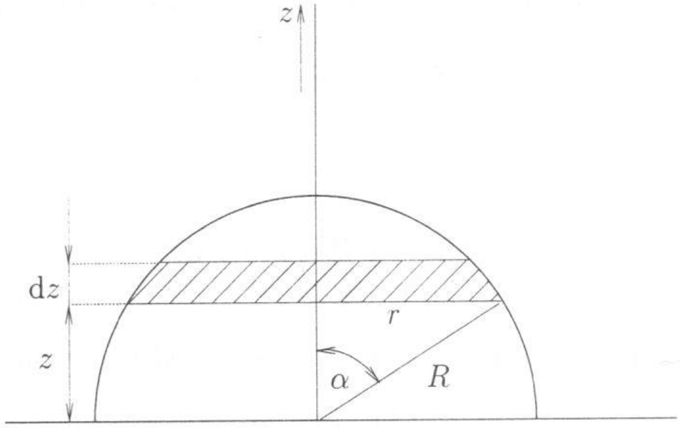
Vzhledem k tomu, že vektorová přímka tíhové síly $\boldsymbol{G}$ (tzv. těžnice) prochází těžištěm tělesa, můžeme určit experimentálně polohu těžiště jako průsečík dvou těžnic při dvou různých bodech závěsu, které neleží na téže těžnici. Těleso nejdříve zavěsíme v libovolném bodě. Je-li tento bod mimo těžiště, začne těleso kývat. Po utlumení kývání získáme první těžnici jako svislou přímku procházející bodem závěsu. Zavěsíme-li nyní těleso v jiném bodě, který leží mimo tutu těžnici, získáme po utlumení kývání stejným způsobem druhou těžnici. Průsečík obou těžnic je hledané těžiště.

*Uveďme příklad na výpočet polohy středu hmotnosti (těžiště): homogenní polokoule, která leží kruhovou podstavou na vodorovné rovině (obr. 2.6.10). Zvolíme-li za* $\mathrm{d}V$ *tenkou vrstvu ve vzdálenosti* $z$ *od podstavy (na obr. 2.6.10 je vyšrafována), pak*

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \, \mathrm{d}z = \pi R^2 \sin^2 \alpha \, \mathrm{d}z = \pi R^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \mathrm{d}z \,,$$

*takže*

$$z^* = \frac{1}{m} \int\limits_0^R z \, \varrho \pi R^2 \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \mathrm{d}z = \frac{3}{8} R \,. \tag{2.6.13}$$




Obrázek 2.6.10

## 2.6.6 Posuvný pohyb tuhého tělesa

Při posuvném pohybu mají všechny body tělesa v témž okamžiku stejnou rychlost $\boldsymbol{v}$, tedy i střed hmotnosti, tj. $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}$. Hybnost tuhého tělesa je určena součtem hybností všech hmotných elementů tělesa. Hybnost elementu o hmotnosti $\mathrm{d}m$ je $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}m = \boldsymbol{v}^* \, \mathrm{d}m = \boldsymbol{v}^* \varrho \, \mathrm{d}V$. Celková hybnost tělesa potom je

$$\boldsymbol{p} = \iiint\limits_V \boldsymbol{v}^* \varrho \,\mathrm{d}V = \boldsymbol{v}^* \iiint\limits_V \varrho \,\mathrm{d}V = m\,\boldsymbol{v}^* .$$

Je-li $\boldsymbol{F}$ výslednice vnějších sil, potom platí

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\boldsymbol{v}^*) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}^*}{\mathrm{d}t^2} . \tag{2.6.14}$$

Kinetická energie elementu tělesa $\mathrm{d}m$ při posuvném pohybu tělesa rychlostí $\boldsymbol{v}$ je podle (2.4.5)

$$\mathrm{d}W_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v^{*2} , \tag{2.6.15}$$

takže celková kinetická energie tělesa hmotnosti $m$ je dána integrálem kinetické energie elementů tělesa $\mathrm{d}m$ přes celý objem tělesa

$$W_k = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\mathrm{d}mv^2 = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,v^{*2} . \tag{2.6.16}$$

Z hlediska posuvného pohybu můžeme tedy tuhé těleso nahradit hmotným bodem, v němž je soustředněna veškerá hmotnost tělesa a který je působištěm výslednice sil působících při translačním pohybu. Tento hmotný bod je umístěn ve středu hmotnosti tělesa.

### 2.6.7 Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy - moment setrvačnosti

Kinetická energie soustavy $n$ hmotných bodů, které rotují kolem společné pevné osy stejnou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ (jejich vzájemná konfigurace je tedy pevná), je dána součtem kinetických energií jednotlivých hmotných bodů

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 = \frac{1}{2}J\,\omega^2 , \tag{2.6.17}$$

kde $m_i$ je hmotnost $i$-tého hmotného bodu, $r_i$ je jeho vzdálenost od rotační osy. Veličina

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 \tag{2.6.18}$$

se nazývá **moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů** k dané ose. V případě tuhého tělesa přejde suma (2.6.18) v integrál. Kinetická energie elementu $\mathrm{d}m$ (obr. 2.6.11.) je

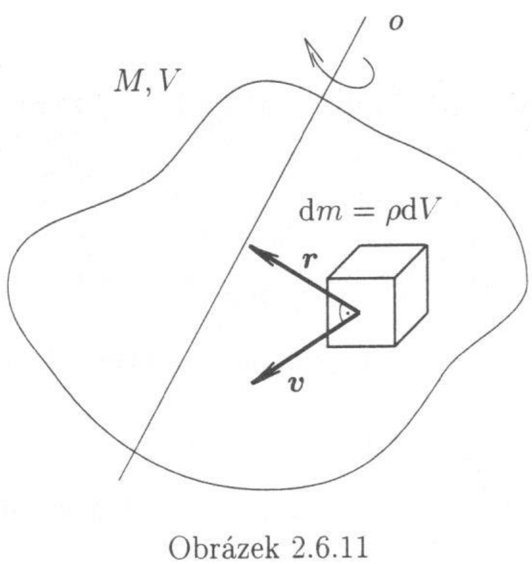
$$\mathrm{d}W_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\varrho\, r^2\,\omega^2\,\mathrm{d}V . \tag{2.6.19}$$

Celkovou kinetickou energii rotujícího tělesa dostaneme integrací kinetické energie elementu $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ přes celý objem tělesa

$$W_k = \frac{1}{2}\omega^2 \iiint\limits_V r^2\,\varrho\,\mathrm{d}V . \tag{2.6.20}$$

Je zřejmé, že veličina

$$J = \iiint\limits_V r^2\,\varrho\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V r^2\,\mathrm{d}m \tag{2.6.21}$$




Obrázek 2.6.11

vzjadřuje **moment setrvačnosti tuhého tělesa** vzhledem k ose rotace. Jednotkou momentu setrvačnosti je

$$[J] = \text{kg m}^2 .$$

Moment setrvačnosti závisí na poloze rotační osy vzhledem k tělesu a na rozložení hmotnosti v tělese. Čím dále od osy rotace je hmotnost v tělese rozložena, tím větší je moment setrvačnosti. Pro všechny rovnoběžné osy je nejmenší moment setrvačnosti k té ose, která prochází těžištěm tělesa (2.6.23).

Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy je tedy

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 . \qquad (2.6.22)$$

Porovnáme-li vztahy (2.6.16) a (2.6.22) pro kinetickou energii posuvného a rotačního pohybu, můžeme pozorovat analogii: hmotnosti tělesa při posuvném pohybu odpovídá v případě rotace moment setrvačnosti a posuvné rychlosti odpovídá rychlost úhlová.

*Jako příklad vypočítáme moment setrvačnosti homogenního rotačního válce vzhledem k ose, která je totožná s osou válce. Poloměr podstavy označíme $R$, výšku válce $h$ a jeho hmotnost $m$. Za hmotný element tělesa zvolíme hmotnost elementárního "prstence", jehož poloměr je $r$, výška je $h$ a tloušťka je* d$r$, *takže*

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r\, \mathrm{d}r\, h\,, \quad \mathrm{d}m = 2\pi\, r\, \mathrm{d}r\, h\, \varrho\,.$$

Dosadíme-li toto vyjádření do (2.6.21), převedeme objemový integrál na určitý integrál podle proměnné $r\epsilon(0, R)$

$$J = \int_0^R 2\pi\, h\, \varrho r^3\, \mathrm{d}r = 2\pi\, h\, \varrho \frac{R^4}{4} = \pi\, R^2\, h\, \varrho \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m\, R^2 .$$

## 2.6.8 Steinerova věta

Předpokládejme, že známe moment setrvačnosti určitého tělesa vzhledem k ose $o_s$ procházející těžištěm $S$ v daném směru, a hledejme na základě definice (2.6.21) vyjádření momentu setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose $o$, rovnoběžné s osou $o_s$, přičemž vzdálenost obou os je $a$. Sledujme jednotlivé kroky tohoto odvození na obr. 2.6.12:

$$J = \iiint_V r^2 \,\mathrm{d}m = \iiint_V \left((a+x)^2 + y^2\right) \mathrm{d}m = \iiint_V \left(a^2 + 2ax + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m =$$

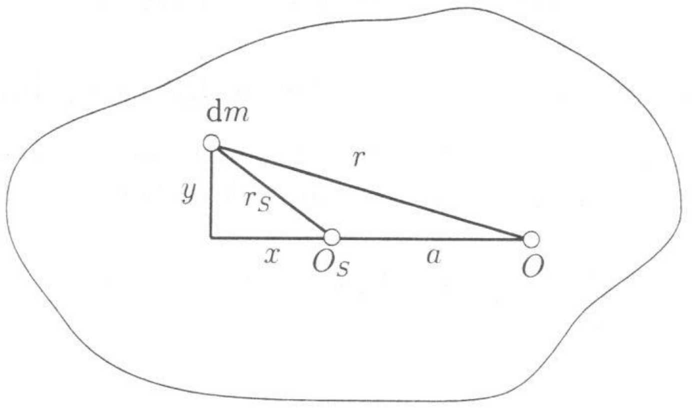
$$= \iiint_V a^2 \,\mathrm{d}m + \iiint_V 2ax \,\mathrm{d}m + \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m =$$

$$= a^2 m + 2a \iiint_V x \,\mathrm{d}m + \iiint_V r_s^2 \,\mathrm{d}m \,.$$

Poslední výraz

$$J_s = \iiint_V r_s^2 \,\mathrm{d}m$$

představuje moment setrvačnosti $J_s$ vzhledem k ose procházející těžištěm.




Obrázek 2.6.12

Integrál v předposledním výrazu můžeme upravit na tvar

$$\iiint_V x \,\mathrm{d}m = m \frac{1}{m} \iiint_V x \,\mathrm{d}m = m\, x^* \,.$$

kde $x^*$ je podle (2.6.10) $x$-ová souřadnice těžiště. Ta je však při dané volbě soustavy souřadnic rovna nule, takže je předposlední výraz roven nule. Došli jsme tedy k hledanému vyjádření momentu setrvačnosti tělesa $J$ vzhledem k ose $o$ neprocházející těžištěm pomocí momentu setrvačnost $J_s$ vzhledem k rovnoběžné ose $o_s$, která těžištěm prochází:

$$J = J_s + m\, a^2. \qquad (2.6.23)$$

Tato rovnice vyjadřuje tzv. **Steinerovu větu**, podle níž je moment setrvačnosti $J$ vzhledem k libovolné ose $o$ dán součtem momentu setrvačnosti $J_s$ vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm a momentu setrvačnosti který by příslušel bodové hmotnosti $m$, jejíž vzdálenost od osy $o_s$ by byla $a$.

### 2.6.9 Moment hybnosti tuhého tělesa

Předpokládejme, že se tuhé těleso otáčí kolem pevné osy s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Moment hybnosti hmotného elementu $\mathrm{d}m$ vzhledem k ose otáčení je podle (2.5.20)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}m\, \boldsymbol{v}\,, \tag{2.6.24}$$

kde $|\boldsymbol{r}| = r$ je vzdálenost elementu $\mathrm{d}m$ od osy otáčení. Celkový moment hybnosti tuhého tělesa lze za použití vztahu (2.1.45) vyjádřit jako integrál elementárního momentu přes celý objem tělesa $V$. Po malé úpravě a dosazení podle (2.6.21) dostaneme vyjádření momentu hybnosti tuhého tělesa

$$\boldsymbol{b} = \iiint_V \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}m\, \boldsymbol{v} = \iiint_V \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \iiint_V \boldsymbol{\omega} r^2\, \mathrm{d}m = J\,\boldsymbol{\omega}\,, \tag{2.6.25}$$

kde jsme složený vektorový součin upravili (s přihlédnutím ke kolmosti vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{r}$) podle známé identity

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B})\,. \tag{2.6.26}$$

### 2.6.10 Pohybová rovnice pro rotační pohyb tuhého tělesa

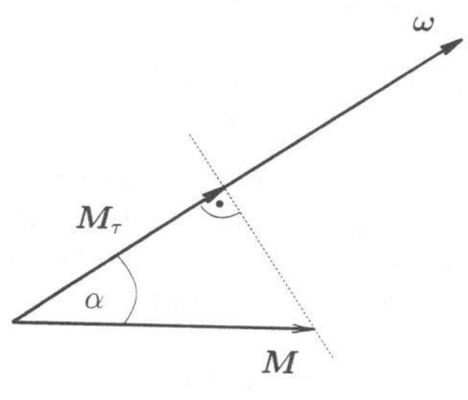
Za předpokladu, že směr momentu síly $\boldsymbol{M}$ je rovnoběžný s osou otáčení, plyne z druhé věty impulsové (2.5.24) a z vyjádření momentu hybnosti tuhého tělesa (2.6.25) důležitý vztah

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\,\boldsymbol{\omega}) = J\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\,\boldsymbol{\varepsilon}\,,$$

tj.

$$\boldsymbol{M} = J\,\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{2.6.27}$$

který představuje pohybovou rovnici otáčivého pohybu tuhého tělesa, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je $J$. Působením momentu síly $\boldsymbol{M}$ se těleso otáčí s úhlovým




Obrázek 2.6.13

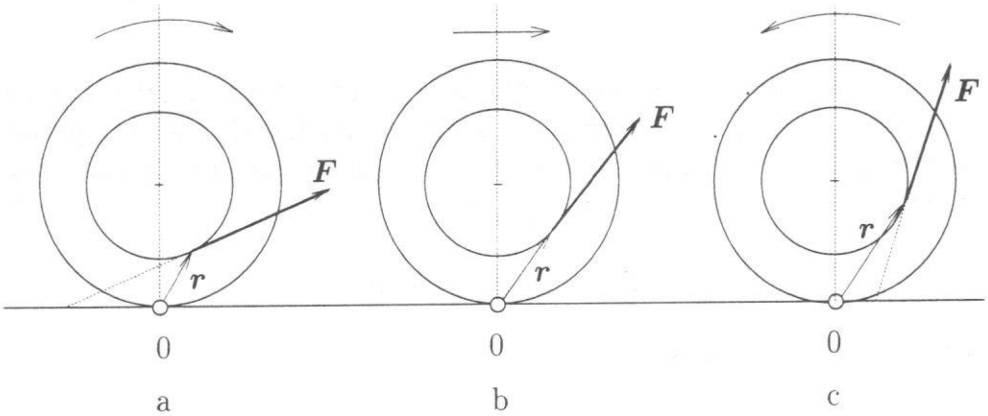
zrychlením $\boldsymbol{\varepsilon}$. Analogicky k druhému Newtonovu pohybovému zákonu (2.2.1) platí, že součin momentu setrvačnosti tělesa a úhlového zrychlení je roven momentu všech vnějších sil vzhledem k pevné ose rotace.

Mezi pohybem translačním a rotačním můžeme pozorovat analogii veličin:

| translace | | rotace | |
|---|---|---|---|
| rychlost | $\boldsymbol{v}$ | úhlová rychlost | $\omega$ |
| zrychlení | $\boldsymbol{a}$ | úhlové zrychlení | $\varepsilon$ |
| hmotnost | $m$ | moment setrvačnosti | $J$ |
| hybnost | $m\boldsymbol{v}$ | moment hybnosti | $J\omega$ |

Pokud směr momentu síly $\boldsymbol{M}$ není rovnoběžný s osou otáčení, uplatní se v pohybové rovnici pouze složka momentu síly $\mathbf{M}_\tau$ rovnoběžná s osou otáčení, jejíž velikost je $M_\tau = M\cos\alpha$ (obr. 2.6.13). Složka normálová se kompenzuje pevností osy.

Skutečnost, že o pohybu tělesa kolem osy rozhoduje nikoliv sama síla, ale její moment, můžeme demonstrovat jednoduchým pokusem. Cívka, na níž je namotáno vlákno, leží na vodorovné desce. Za vlákno táhneme silou $\boldsymbol{F}$, která leží v nákresně (obr. 2.6.14). Okamžitá




Obrázek 2.6.14

osa otáčení cívky prochází bodem 0 kolmo na nákresnu. V případě a) má síla $\boldsymbol{F}$ nenulový moment, který otáčí cívkou ve směru šipky tak, že se vlákno navíjí. V případě c) je tomu naopak. V případě b) protíná směr síly $\boldsymbol{F}$ rotační osu a síla $\boldsymbol{F}$ má proto nulový moment k ose. Cívka se po podložce pouze smýká.

### 2.6.11 Třecí síla

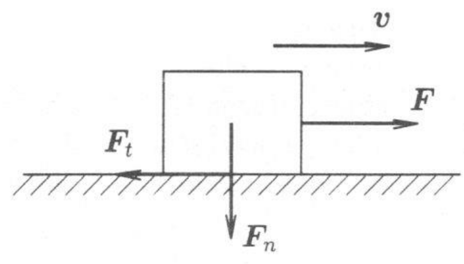
Proti každému pohybu skutečných těles působí třecí síla $\boldsymbol{F}_t$. Pokud ji nemůžeme zanedbat, musí se tato síla objevit také v pohybové rovnici vedle vnější síly $\boldsymbol{F}$, která by sama o sobě vyvolávala zrychlený pohyb:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t = m\,\boldsymbol{a}\,, \tag{2.6.28}$$

tj.

$$\boldsymbol{F} - F_t\,\boldsymbol{\tau}^o = m\,\boldsymbol{a}\,, \tag{2.6.29}$$

kde $\boldsymbol{\tau}^o$ je jednotkový vektor ve směru okamžité rychlosti. Při pohybu zrychleném mají vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_t$ opačnou orientaci, neboť tření působí proti zrychlující síle. Při pohybu zpožděném mají stejnou orientaci (vnější síla $\boldsymbol{F}$ působí také proti pohybu), síla tření v tom případě napomáhá brzdit pohyb. Typickým příkladem síly tření je tření smykové, které vzniká ve styčných plochách dvou po sobě se pohybujících těles. Síla tření leží v tomto případě v rovině




Obrázek 2.6.15

styčné plochy obou těles a je přímo úměrná normálové složce síly, kterou jsou obě tělesa k sobě přitlačována, tj. té složce přítlačné síly, která spadá do směru kolmého na rovinu styčné plochy. Označíme-li tuto normálovou složku $\boldsymbol{F}_n$, potom pro velikost smykového tření můžeme psát vztah:

$$F_t = \mu F_n , \tag{2.6.30}$$

kde $\mu$ je koeficient smykového tření. Jeho hodnota závisí především na jakosti styčných ploch. Při malých rychlostech zůstává konstantní, při zvyšování rychlosti se jeho hodnota zmenšuje. Pohybová rovnice (2.6.29) pro pohyb tělesa na obr. 2.6.15, na které působí tažná síla $\boldsymbol{F}$, bereme-li v úvahu také sílu tření, bude mít potom tvar

$$\boldsymbol{F} - \mu F_n \boldsymbol{\tau}^o = m\, \boldsymbol{a} .$$

Při zrychleném pohybu je:

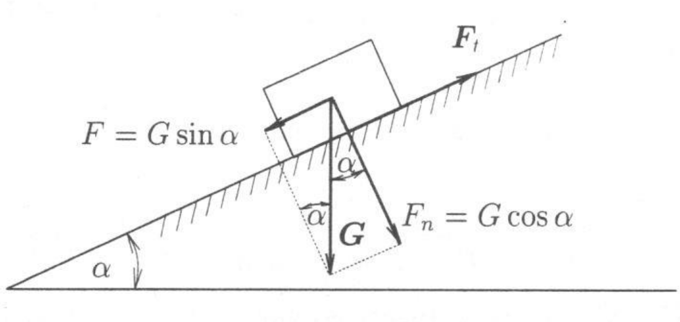
$$a = \frac{F - \mu F_n}{m} , \quad \boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{v} ,$$

při zpomaleném pohybu platí:

$$a = \frac{F + \mu F_n}{m} , \quad \boldsymbol{F} \uparrow\downarrow \boldsymbol{v} .$$

Tak např. pro zrychlení tělesa na nakloněné rovině (obr. 2.6.16) plyne z těchto rovnic

$$a = g\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha) .$$



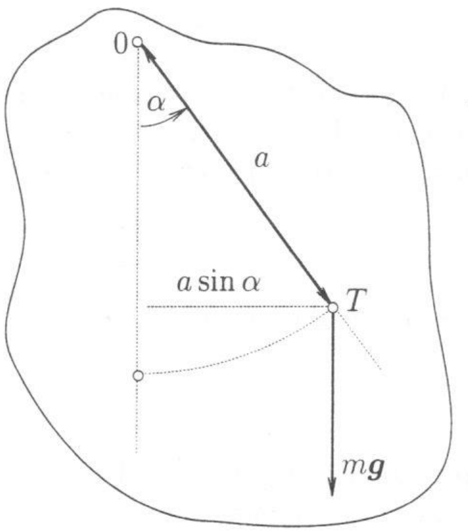

Obrázek 2.6.16

### 2.6.12 Kyvadla

Pohyb, který koná každý bod kyvadla, se děje po kruhovém oblouku. Okamžitou polohu kyvadla určuje úhlová výchylka z rovnovážné polohy. Kyvadlo má jeden stupeň volnosti. Svůj zájem soustředíme na tři typy kyvadel:

**Fyzické kyvadlo**

Za fyzické kyvadlo lze považovat jakékoliv tuhé těleso, zavěšené v tíhovém poli otáčivě kolem vodorovné osy, která neprochází těžištěm. Při stabilní rovnovážné poloze se těžiště nachází na svislici pod osou otáčení. Vychýlíme-li kyvadlo z rovnovážné polohy, uplatní se moment tíhové síly, který se snaží vrátit kyvadlo do rovnovážné polohy (viz. obr. 2.6.17). Označíme-li




Obrázek 2.6.17

vzdálenost těžiště od osy $a$, platí pro složku tohoto momentu, která je rovnoběžná s osou

$$M = -m\,g\,a\,\sin\alpha\,. \tag{2.6.31}$$

Znaménko minus vystihuje opačnou orientaci momentu síly vůči úhlové výchylce $\alpha$.

Z této rovnice dosadíme do pohybové rovnice pro otáčivý pohyb (2.6.27)

$$M = -m\,g\,a\,\sin\alpha = J\,\varepsilon = J\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{2.6.32}$$

Řešení této rovnice se podstatně zjednoduší, omezí-li se úhlová výchylky kyvadla na hodnoty $|\alpha| < \alpha_{max}$, přičemž volba maximálního rozkmitu $\alpha_{max}$ závisí na požadované přesnosti, která je dána relativní odchylkou

$$\delta_{max} = \frac{\alpha_{max} - \sin\alpha_{max}}{\alpha_{max}}\,.$$

Např. pro $\alpha_{max} = 5^o$ je $\delta_{max} = 0.0005$.

Nepřekračuje-li tedy hodnota $\alpha_{max}$ maximální dovolenou relativní odchylku $\delta_{max}$, lze rovnici (2.6.32) linearizovat dosazením

$$\sin\alpha_{max} \approx \alpha_{max}\,,$$

takže přechází v lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,a}{J}\,\alpha = 0\,. \tag{2.6.33}$$

Obecné řešení této rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$\alpha = \alpha_o \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } \omega = \sqrt{\frac{m\,g\,a}{J}}, \tag{2.6.34}$$

o čemž se snadno přesvědčíme dosazením druhé derivace předpokládaného řešení

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \alpha_o \cos(\omega t + \varphi)$$

do rovnice (2.6.33). Po zkrácení $\alpha$ dostaneme

$$-\omega^2 + \frac{m\,g\,a}{J} = 0. \tag{2.6.35}$$

Kyvadlo tedy koná podle (2.6.34) periodický kývavý pohyb, jehož perioda je dána podmínkou $\omega T = 2\pi$, kde $T$ je perioda tohoto pohyba a veličina $\omega$ se nazývá **úhlová frekvence**. Mezi úhlovou frekvencí $\omega$, periodou $T$ a frekvencí kývání $f$ pak platí vztahy

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T}. \tag{2.6.36}$$

Podle (2.6.35) je úhlová frekvence fyzického kyvadla

$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,a}{J}}. \tag{2.6.37}$$

Integrační konstanty $\alpha_o$ a $\varphi$ představují amplitudu úhlové výchylky (tzv. výkyv) a počáteční fázi. Lze je snadno určit z počátečních podmínek.

Perioda kývání (tzv. doba kmitu) fyzického kyvadla je podle (2.6.37) a (2.6.36)

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,a}} \tag{2.6.38}$$

a kmitočet je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{m\,g\,a}{J}}. \tag{2.6.39}$$

Polovina periody je tzv. doba kyvu $\tau$ (je to tedy doba pohybu z jedné krajní polohy do druhé krajní polohy, nebo z rovnovážné polohy do krajní polohy a zpět do rovnovážné polohy).

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,a}}. \tag{2.6.40}$$

Připomeňme, že rovnice (2.6.33) lze použít pouze v případě, že maximální úhlová odchylka $\alpha_{max}$ nepřekračuje hodnotu, při níž dosahuje maximální dovolená relativní odchylka hodnoty $\delta_{max}$.

**Matematické kyvadlo**

Matematické kyvadlo představuje hmotný bod hmotnosti $m$, zavěšený na tuhém nehmotném vláknu délky $l$. Jeho moment setrvačnosti je $J = ml^2$, vzdálenost hmotného bodu od osy otáčení je $a = l$. Dosadíme-li tyto podmínky do (2.6.40), dostaneme vyjádření doby kyvu matematického kyvadla:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m\,l^2}{m\,g\,l}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.6.41}$$

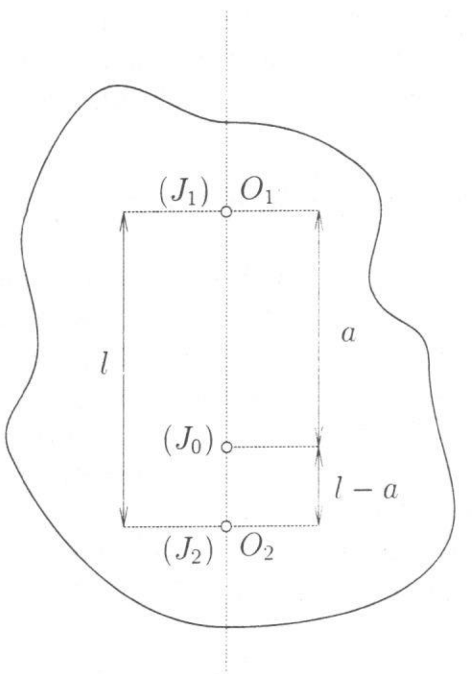
Připomeňme, že maximální úhlová odchylka $\alpha_{max}$ nesmí překročit hodnotu, při níž dosahuje maximální dovolená relativní odchylka hodnoty $\delta_{max}$.

Pro fyzické kyvadlo se zavádí tzv. redukovaná délka l, což je délka takového matematického kyvadla, které má stejnou dobou kyvu jako dané kyvadlo fyzické. Porovnáním rovnic (2.6.40) a (2.6.41) plyne pro redukovanou délku

$$l = \frac{J}{m\,a}. \tag{2.6.42}$$

**Reverzní kyvadlo**

Reverzní kyvadlo je fyzické kyvadlo, které může kývat kolem dvou rovnoběžných os, uložených nesymetricky vůči těžišti, pro něž má kyvadlo stejné doby kyvu. Dokážeme, že vzdálenost




Obrázek 2.6.18

těchto dvou os je rovna redukované délce fyzického kyvadla.

Označíme redukovanou délku $l$, moment setrvačnosti pro osu $O_1$ označíme $J_1$, pro osu jdoucí těžištěm označíme moment setrvačnosti $J_o$ a pro osu $O_2$ označíme $J_2$. Podle Steinerovy věty (2.6.23) platí

$$J_1 = J_o + m\,a^2\,, \quad J_2 = J_o + m\,(l-a)^2\,.$$

Redukované délky pro jednotlivé osy lze vyjádřit následovně.

$$l_1 = \frac{J_1}{ma} = \frac{J_o}{ma} + a\,, = \frac{J_2}{m(l-a)} = \frac{J_o}{m(l-a)} + l - a\,. \tag{2.6.43}$$

Má-li mít reverzní kyvadlo stejné doby kyvu pro obě osy, musí být $l_1 = l_2$. Porovnáním obou rovnic dostaneme

$$\frac{J_o}{ma} + a = \frac{J_o}{m(l-a)} + l - a\,,$$

což je po úpravě

$$J_o(l-2a) = m\,a\,(l-a)(l-2a)\,.$$

Tuto rovnici lze krátit výrazem $(l-2a)$ za předpokladu, že je nenulový, tj. $a \neq l/2$. Potom

$$J_o = m\,a\,(l-a)$$

a z rovnice (2.6.43)

$$J_o = m\,a\,(l_1-a)\,.$$

Z porovnání plyne $l = l_1$ a tudíž i $l = l_2$, tj. vzdálenost obou os je rovna redukované délce. Reverzní kyvadlo bývá provedeno jako tyč se dvěma břity (osami). Na jednom konci je posuvné závaží, které se nastaví tak, aby doba kyvu na jednom i na druhém břitu byla stejná. Reverzního kyvadla se užívá k měření tíhového zrychlení.

## 2.7 Mechanika pevného kontinua

Tuhé těleso jsme definovali jako soustavu spojitě rozložených hmotných elementů, jejichž vzájemné polohy se působením sil nemění. Skutečná tělesa se však působením sil deformují, to znamená, že se jejich hmotné elementy vzájemně posouvají a mění, čímž se mění tvar i objem tělesa. Nebereme-li v úvahu diskrétní částicovou strukturu látek, můžeme rozložení látky v tělesech považovat za kontinuální. Model, v němž reálné prostředí nahrazujeme idealizovaným prostředím se spojitě rozloženou hmotou, se nazývá **kontinuum**. Mechanika kontinua se pak zabývá studiem vzájemného pohybu elementů látek pevných, kapalných a plynných působením vnějších sil. Mechanika pevného kontinua zkoumá problémy pružnosti a pevnosti látek pevných. Omezíme se pouze na látky izotropní.

### 2.7.1 Deformace tělesa při namáhání tahem

Deformaci tělesa lze vyvolat vnějším silovým působením. Při něm dojde k posunutí částic z původních rovnovážných poloh do nových rovnovážných poloh, v nichž jsou vnější síly kompenzovány vnitřními pružnými silami. V dalších úvahách se omezíme na tzv. pružné deformace. Deformaci nazveme **pružnou** tehdy, když při odstranění vnější síly se deformované těleso vrátí do původní polohy. Silové působení na těleso vyjadřujeme napětím $\sigma$, které je dáno podílem vnitřní síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ a elementární plochy $\mathrm{d}S$ průřezu tělesa

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}\,. \tag{2.7.1}$$

Jednotkou je 1 pascal

$$[\sigma] = \mathrm{Pa} = \mathrm{N\,m^{-2}}\,.$$

Napětí vyjadřuje silové účinky, které se snaží vrátit vychýlené částice ve vrstvě elementární plochy $\mathrm{d}S$ do rovnovážné polohy. Je-li deformující síla kolmá k ploše $\mathrm{d}S$, jde o napětí normálové, působí-li deformující síla ve směru plochy $\mathrm{d}S$, jde o napětí tečné.

Míru deformace charakterizuje relativní deformace $\Delta x/x$, kde $\Delta x$ je absolutní deformace a $x$ je původní hodnota veličiny. Experimentálně zjištěnou závislost napětí na relativní defor-