2.5 Dynamika soustavy hmotných bodů

V tomto odstavci rozšíříme studium dynamiky jednoho hmotného bodu na soustavu n hmotných bodů o hmotnostech $m_1, m_2, ..., m_n$. Celková hmotnost soustavy je

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \,.$$

Okamžitá poloha i-tého bodu je určena jeho souřadnicemi x_i, y_i, z_i, které tvoří složky polohového vektoru $\boldsymbol{r}_i$.

Každý hmotný bod, který se může pohybovat volně v prostoru, má tři stupně volnosti. Obsahuje-li soustava n volných hmotných bodů, má tato soustava $3n$ stupňů volnosti. K úplnému popisu polohy soustavy potřebujeme $3n$ rovnic (např. to mohou být rovnice udávající závislost souřadnic každého bodu na čase). K úplnému popisu dynamického stavu soustavy potřebujeme dalších $3n$ rovnic, určujících hybnosti, nebo rychlosti:

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i = m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \,.$$

Vektor celkové hybnosti soustavy je dán vektorovým součtem hybností všech bodů soustavy:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i \,.$$

Pro určení dynamického stavu soustavy n hmotných bodů v daném okamžiku je tedy třeba udat n polohových vektorů (nebo $3n$ souřadnic) a n vektorů hybnosti (nebo $3n$ složek vektorů hybnosti), tj. dohromady $2n$ vektorů nebo $6n$ skalárních údajů. Vyskytují-li se v soustavě hmotných bodů omezující podmínky, tzv. vazby, je počet stupňů volnosti menší.

2.5.1 První věta impulsová

Síly, které mohou působit na hmotné body soustavy, jsou dvojího typu:
a) síly vnější, jimiž působí hmotné objekty mimo soustavu na hmotné objekty soustavy
b) síly vnitřní, kterými jednotlivé hmotné body soustavy působí na sebe navzájem.

Výslednici vnějších sil, která působí na i-tý hmotný bod označme $\boldsymbol{F}_i$, a $\boldsymbol{F}_{ik}$ nechť je vnitřní síla, kterou působí k-tý bod soustavy na bod i-tý. Je zřejmé, že podle zákona akce a reakce platí

$$\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki} \,. \tag{2.5.1}$$

Označme výslednici vnitřních sil, kterými působí všechny ostatní hmotné body na i-tý bod

$$\boldsymbol{F}_{Ii} = \sum_{k=1}^{i-1} \boldsymbol{F}_{ik} + \sum_{k=i+1}^{n} \boldsymbol{F}_{ik} \,. \tag{2.5.2}$$

Pohyb jednotlivých hmotných bodů je popsán pohybovými rovnicemi

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii} \,, \quad i = 1, 2, 3, ..., n \,, \tag{2.5.3}$$

jejichž součet vyjadřuje pohybovou rovnici celé soustavy

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ii}\,. \tag{2.5.4}$$

Levou stranu této rovnice lze upravit:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde $\boldsymbol{p}$ je celková hybnost soustavy.

První člen na pravé straně (2.5.4) vyjadřuje výslednici všech vnějších sil, které působí na soustavu

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\,.$$

Druhý člen na pravé straně reprezentuje výslednici všech vnitřních sil. Dosadíme-li do tohoto vyjádření podle (2.5.2), dostaneme vzhledem k (2.5.1)

$$\boldsymbol{F}_I = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ii} = \sum_{i=3}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \boldsymbol{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \boldsymbol{F}_{ik} = \boldsymbol{0}\,.$$

Rovnici (2.5.4) můžeme tedy psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{F}\,, \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\,, \tag{2.5.5}$$

což je matematická formulace **první věty impulsové**, která říká, že **časová změna (derivace podle času) celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici vnějších sil působících na soustavu.**

Pro případ izolované soustavy, která je charakterizována podmínkou

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0,$$

dostaneme z (2.5.5)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

a odtud plyne

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{konst.}$$

Celková hybnost izolované soustavy je tedy konstantní vektor. Tato věta je vyjádřením tzv. zákona zachování hybnosti izolované soustavy.

Zákon zachování hybnosti je přímým důsledkem zákona akce a reakce. Je vedle zákona zachování energie jedním ze základních fyzikálních zákonů a souvisí s homogenitou prostoru.

2.5.2 Střed hmotnosti soustavy

V rovnici (2.5.5) lze výslednou hybnost vyjádřit pomocí celkové hmotnosti soustavy m takto:

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}_s\,.$$

Ukažme význam rychlosti $\boldsymbol{v}_s$. Je zřejmé, že

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{v}_i = m\,\boldsymbol{v}_s\,. \tag{2.5.6}$$

Jelikož je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{r}_i$$

a položíme-li

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_s}{\mathrm{d}t}\,, \quad \text{platí} \quad m\,\boldsymbol{v}_s = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\boldsymbol{r}_s)\,.$$

Porovnáním pravých stran obou předchozích rovností získáme při volbě nulové integrční konstanty

$$\boldsymbol{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{r}_i\,. \tag{2.5.7}$$

Bod s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_s$ nazveme **střed hmotnosti** soustavy (hmotný střed). Je to bod, reprezentující soustavu hmotných bodů při dynamickém popisu. Derivováním rovnice (2.5.6) podle času a porovnáním s rovnicí (2.5.5) dostaneme vztah

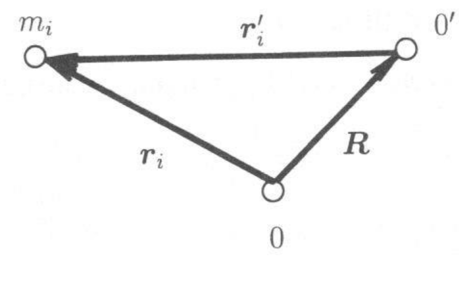
$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\,. \tag{2.5.8}$$

Tato rovnice se shoduje s pohybovou rovnicí hmotného bodu, jehož hmotnost je m, polohový vektor $\boldsymbol{r}_s$ a na který působí síla $\boldsymbol{F}$. Střed hmotnosti soustavy hmotných bodů se pohybuje tak, jakoby v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy a působila na něj výslednice vnějších sil působících na soustavu. Souřadnice hmotného středu můžeme podle (2.5.7) vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i\,,\\ y_s &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i\,,\\ z_s &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i\,. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Dokážeme, že umístění hmotného středu je nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Vedle referenčního bodu 0 zvolme ještě další referenční bod 0', jehož poloha vzhledem k 0 je dána vektorem $\boldsymbol{R}$. Nechť $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ jsou polohové vektory jednotlivých hmotných bodů vzhledem k 0; $\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \ldots, \boldsymbol{r}'_n$ vzhledem k 0', a nechť $\boldsymbol{r}_s$, $\boldsymbol{r}'_s$ jsou polohové vektory hmotného středu vzhledem k 0 a 0'. Podle obr. 2.5.1 platí

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i\,.$$



Obrázek 2.5.1

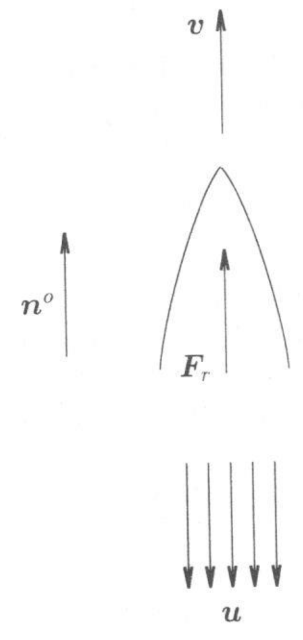
Můžeme tedy polohu hmotného středu vzhledem k 0 vyjádřit takto:

$$\boldsymbol{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) = \boldsymbol{R} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_s. \tag{2.5.10}$$

Tento výsledek dokazuje, že hmotný střed vypočítaný vzhledem k 0, resp. k $0'$ je týž.

2.5.3 Fyzikální principy raketového letu

Užití zákona zachování hybnosti budeme demonstrovat na pohybu rakety (obr. 2.5.2). Vzhledem k astronomickým vzdálenostem budeme raketu považovat za hmotný bod. Nechť má



Obrázek 2.5.2

raketa v čase t rychlost $\boldsymbol{v}(t)$ a její hmotnost spolu s palivem nechť je $m(t)$, takže okamžitá hybnost rakety je

$$\boldsymbol{p}(t) = m(t)\,\boldsymbol{v}(t)\,. \tag{2.5.11}$$

Za elementární časový interval $\mathrm{d}t$ uniknou z rakety plyny o hmotnosti $\mathrm{d}m_p$ rychlostí $\boldsymbol{u}$. měřenou vzhledem k téže soustavě souřadnic, ve které měříme rychlost rakety. Rychlost rakety se změní za časový interval $\mathrm{d}t$ z $\boldsymbol{v}$ na $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Hybnost soustavy v čase $t + \mathrm{d}t$ bude

$$\boldsymbol{p}(t+\mathrm{d}t) = (m-\mathrm{d}m_p)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}) + \mathrm{d}m_p\boldsymbol{u}\,. \tag{2.5.12}$$

Podle zákona zachování hybnosti izolované soustavy musí platit

$$\boldsymbol{p}(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{p}(t)\,. \tag{2.5.13}$$

tedy

$$(m-\mathrm{d}m_p)(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}) + \mathrm{d}m_p\boldsymbol{u} = m\,\boldsymbol{v}\,. \tag{2.5.14}$$

Uvědomíme-li si, že hmotnost uniklých plynů $\mathrm{d}m_p$ je vlastně rovna úbytku hmotnosti celé soustavy, a jelikožm $m(t)$ je klesající funkcí času, je $\mathrm{d}m < 0$. Položíme

$$\mathrm{d}m_p = -\mathrm{d}m$$

a rovnici (2.5.14) upravíme na tvar

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}m}{m}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{m}\boldsymbol{v}_r\,. \tag{2.5.15}$$

Ve vztahu (2.5.15) jsme zanedbali součin $\mathrm{d}m\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{v}_r$ představuje relativní rychlost vytékajících plynů vzhledem k raketě. Vztah (2.5.15) můžeme dále upravit na tvar

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{F}_r\,.$$

kde

$$\boldsymbol{F}_r = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_r$$

představuje tzv. reaktivní (tahovou) sílu, která pohání raketu dopředu. Integrací rovnice (2.5.15) dostaneme

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r \ln m + \boldsymbol{C}\,. \tag{2.5.16}$$

Integrační konstantu C stanovíme z počátečních podmínek. Jestliže v čase $t =$s měla raketa rychlost $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o$ a její hmotnost byla $m = m_o$, potom z (2.5.16) dostaneme

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{v}_o - \boldsymbol{v}_r \ln m_o\,.$$

Můžeme tedy vztah (2.5.16) psát ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{v}_r \ln\frac{m}{m_o}\,.$$

Vzhledem k tomu, že při zrychlování je $\boldsymbol{v}_o \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}_r$ a že $m < m_o$, platí pro velikost rychlosti

$$v = v_o + v_r \ln\frac{m_o}{m}\,.$$

Pro velikost konečné rychlost v_k rakety po spálení celé zásoby paliva při počáteční rychlosti $v_o = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ pak dostaneme

$$v_k = v_r \ln\frac{m_o}{m_k} = v_r \ln Z\,.$$

kde konečná hmotnost m_k je hmotnost samotné rakety bez paliva. Číslo

$$Z = \frac{m_o}{m_k}$$

se nazývá **Ciolkovského číslo**.

2.5.4 Moment síly a moment hybnosti

Předpokládejme nyní, že hmotný bod m je otáčivě spojen s pevným bodem 0, přičemž vzdálenost r mezi hmotným bodem m a bodem 0 je v průběhu zkoumaného děje konstantní. Nepůsobí-li na hmotný bod m žádná vnější síla, je buď v klidu, nebo koná rovnoměrný otáčivý pohyb po kružnici o poloměru r, který je popsán rovnicemi (2.1.37) - (2.1.52). Pevnost otáčivého spoje mezi m a 0 představuje dostředivou sílu. Působí-li na hmotný bod m vnější síla $\boldsymbol{F}$, změní se pohyb na nerovnoměrný otáčivý pohyb po kulové ploše $S_k \equiv (0, r)$. Je zřejmé, že pohybový účinek síly $\boldsymbol{F}$ nelze vyjádřit pohybovou rovnicí (2.2.14).

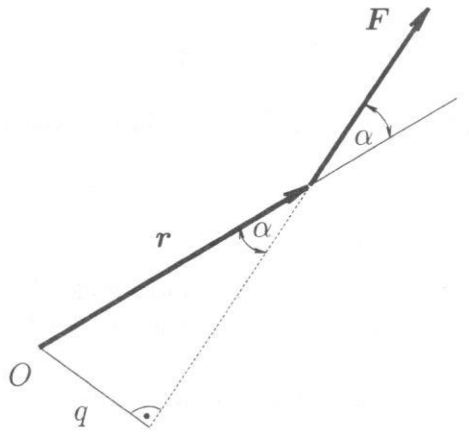
Působení síly $\boldsymbol{F}$ na hmotný bod v takovéto soustavě vyjadřuje tzv. **moment síly $\boldsymbol{M}$** vzhledem k bodu 0. Velikost vektoru momentu síly M je definována součinem velikosti síly F a vzdálenosti q bodu 0 od vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$:

$$M = F q . \tag{2.5.17}$$

Vzdálenost q se nazývá **rameno síly $\boldsymbol{F}$**, bod 0 je tzv. **momentový bod**. Je-li poloha působiště síly $\boldsymbol{F}$ určena radiusvektorem $\boldsymbol{r}$, jehož počátek je v momentovému bodě 0, lze rameno síly vyjádřit ve tvaru $q = r \sin\alpha$, kde $r = |\boldsymbol{r}|$ je délka průvodiče a α je úhel mezi průvodičem $\boldsymbol{r}$ a silou $\boldsymbol{F}$ (viz. obr. 2.5.3). Velikost momentu síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu 0 tedy je

$$M = F r \sin\alpha . \tag{2.5.18}$$

Analogicky k (2.1.43) - (2.1.47) zvolíme směr vektoru $\boldsymbol{M}$ tak, aby jednoznačně určoval směr



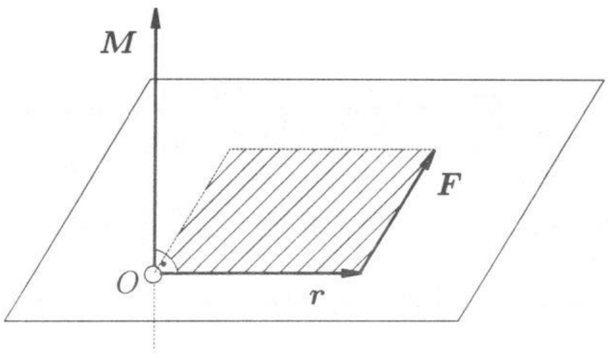
Obrázek 2.5.3

a smysl otáčivého účinku momentu síly. Je zřejmé, že tuto vlastnost má vektorový součin $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Uvážíme-li, že absolutní hodnota tohoto vektorového součinu je $|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = r F \sin\alpha$, můžeme vzhledem k (2.5.18) vyjádřit moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu 0 ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} . \tag{2.5.19}$$

Moment síly je tedy vektor kolmý na rovinu vektorů $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. Jeho směr je totožný se směrem osy jdoucí bodem 0 kolmo k rovině určené vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$ (obr. 2.5.4). Tato osa je osou otáčivého účinku momentu síly. Z (2.5.19) je zřejmé, že pro $\alpha = 0$, tj. v případě že vektorová přímka síly prochází momentovým bodem 0, je moment síly nulový a pro $\alpha = 90^o$, tj. působí-li síla kolmo na průvodič $\boldsymbol{r}$, je maximální.
Jednotka momentu síly je

$$[M] = \mathrm{N\,m} .$$



Obrázek 2.5.4

Analogicky k (2.5.19) lze definovat moment hybnosti. Označíme-li hybnost hmotného bodu $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, můžeme definovat moment hybnosti $\boldsymbol{b}$ vzhledem k bodu 0 jako vektorový součin:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} . \tag{2.5.20}$$

Jednotka momentu hybnosti je

$$[b] = \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}} .$$

2.5.5 Druhá věta impulsová

Aplikujme nyní poznatky formulované v předchozím odstavci rovnicemi (2.5.17) - (2.5.20) na soustavu n hmotných bodů $m_1, m_2, \ldots, m_n$, které jsou otáčivě spojeny se společným momentovým bodem 0, přičemž vzdálenost r_i mezi hmotným bodem m_i a momentovým bodem 0 je i v tomto případě v průběhu zkoumaného děje konstantní. Nepůsobí-li na hmotný bod m_i žádná vnější síla, je buď v klidu, nebo koná rovnoměrný otáčivý pohyb po kružnici o poloměru r_i, který je i v tomto případě popsán rovnicemi (2.1.37) - (2.1.52). Pevnost otáčivého spoje mezi m_i a 0 představuje, podobně jako v předchozím případě, dostředivou sílu. Působí-li na hmotný bod m_i vnější síla $\boldsymbol{F}_i$, změní se pohyb tohoto bodu na nerovnoměrný otáčivý pohyb po kulové ploše $S_{ki} \equiv (0, r_i)$. Jak jsme již uvedli v předchozím odstavci, nelze pohybový účinek síly $\boldsymbol{F}_i$ na i-tý bod vyjádřit pohybovou rovnicí (2.2.14). Aplikujme tedy na tuto soustavu hmotných bodů momentové vyjádření dynamických účinků síly, zavedené v předchozím odstavci.

Moment hybnosti i-tého hmotného bodu a moment síly $\boldsymbol{F}_i$ vzhledem k momentovému bodu 0 udávají podle (2.5.20) a (2.5.19) vektorové součiny

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i\,\boldsymbol{v}_i , \quad \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i ,$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je radiusvektor bodu o hmotnosti m_i vzhledem k momentovému bodu 0, $\boldsymbol{v}_i$ je rychlost bodu o hmotnosti m_i a $\boldsymbol{p}_i$ je hybnost bodu o hmotnosti m_i.
Vektory

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b}_i , \quad \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i \tag{2.5.21}$$

pak představují výsledný moment hybnosti a moment síly soustavy. Po zderivování momentu hybnosti (2.5.21) a dosazení podle (2.5.3) dostaneme po malé úpravě:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{b}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii})) = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{Ii}), \quad (2.5.22)$$

kde jsme vzhledem ke kolinearitě činitelů vypustili vektorové součiny

$$\boldsymbol{v}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}.$$

Pro poslední sumu v (2.5.22), kde $\boldsymbol{F}_{Ii}$ je podle (2.5.2) výslednice vnitřních sil kterými působí všechny ostatní hmotné body na i-tý bod, zřejmě vzhledem k (2.5.1) platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{Ii}) = \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{Ik}) = \boldsymbol{0}.$$

Moment hybnosti soustavy tedy nezávisí na vnitřních silách.

Dosadíme-li tento závěr do (2.5.22), dostaneme matematické vyjádření **druhé věty impulsové:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i), \quad (2.5.23)$$

nebo vzhledem k (2.5.20) a (2.5.19)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}. \quad (2.5.24)$$

podle níž je časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy rovna výslednému momentu vnějších sil.

Zbývá nám ještě vyšetřit, jak závisí výraz pro celkový moment hybnosti na volbě momentového bodu. Mějme dva momentové body 0 a 0′, do nichž umístíme počátky souřadnicových soustav. Poloha bodu 0′ vzhledem k 0 nechť je dána polohovým vektorem $\boldsymbol{R}$ (obr. 2.5.1). Polohový vektor a vektor rychlosti i-tého hmotného bodu v čárkovaném systému označme $\boldsymbol{r}'_i$, $\boldsymbol{v}'_i$. Podle obr. 2.5.1 platí

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i$$

a odtud derivováním podle času dostaneme

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i.$$

Moment hybnosti soustavy můžeme nyní vyjádřit takto:

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times m_i\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R} \times m_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}'_i \times m_i\boldsymbol{v}_i.$$

Dokázali jsme tedy, že moment hybnosti (a analogicky i moment síly) je obecně závislý na volbě momentového bodu.

V izolované soustavě je $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ a tedy $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$, takže platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}, \qquad (2.5.25)$$

odkud plyne **zákon zachování momentu hybnosti:**

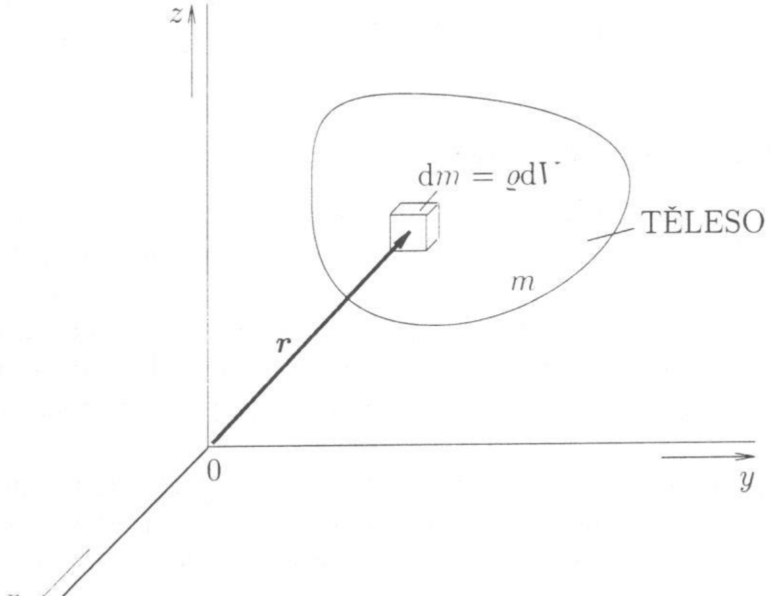
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{konst.} \qquad (2.5.26)$$

podle nějž je v izolované soustavě celkový moment hybnosti konstantní.

Zákon zachování momentu hybnosti je třetím ze **zákonů zachování** v klasické mechanice. Pro trojici fyzikálních veličin hybnost, energii a moment hybnosti platí zákony zachování v izolované soustavě jak v makro-, tak v mikrosvětě. Jsou důsledkem základních vlastností prostoru a času, homogenity a izotropie. Součiny hybnosti a délky, a energie a času, mají stejné rozměry jako moment hybnosti. Představují fyzikální veličinu, nazvěme ji **akce**, která je jakousi nejobecnější mírou pohybu, danou změnou hybnosti v určité části prostoru a přeměnou energie v nějakém časovém intervalu. V kvantové fyzice se s ní setkáváme v relacích neurčitosti. Také Planckova konstanta h má rozměr akce.

2.6 Dynamika tuhého tělesa

Až dosud jsme vyšetřovali pohyb těles, jejichž rozměry jsou relativně tak malé, že je můžeme považovat za hmotné body. Předpokládejme nyní, že hmotnost tělesa je rozložena v tak velkém objemu, že představu hmotného bodu již nelze použít.



Obrázek 2.6.1

Abychom mohli pro řešení dynamiky takového tělesa použít výsledků, ke kterým jsme dospěli v předchozí kapitole, rozdělíme těleso na dostatečně malé elementy, jež lze se zvolenou přesností považovat za hmotné body (obr. 2.6.1). Je-li objem elementárního tělesa $\mathrm{d}V$, pak jeho hmotnost je

$$\mathrm{d}m = \varrho \, \mathrm{d}V \, .$$