

Dynamické systémy 3

Nelineární systémy

Ing. Jaroslav Jíra, CSc.

Stabilita nelineárních systémů

První Ljapunovova metoda – linearizace

Na analýzu stability nelineárních systémů je potřeba složitějších nástrojů než pro systémy lineární.

Prvním a nejjednodušším krokem v takové analýze bývá **metoda linearizace**, taktéž zvaná první Ljapunovova metoda. Princip metody spočívá v rozvoji pravé strany pohybové rovnice v okolí pevného bodu v Taylorovu řadu, přičemž zanedbáváme členy vyšších řádů.

Taylorova řada

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - \tilde{x})^2 + \dots$$

Po zanedbání členů vyšších řádů dostáváme

$$f(x) \approx f(\tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - \tilde{x})$$

Dále víme, že pro pevný bod platí $f(\tilde{x}) = dx/dt = 0$, z čehož plyne

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x - \tilde{x})$$

Vzhledem k tomu, že zderivace konstanty je rovna nule, platí

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(x - \tilde{x})}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

z čehož plyne

$$\frac{d(x - \tilde{x})}{dt} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\tilde{x}} (x - \tilde{x})$$

Původní systém

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Linearizovaný systém

$$\frac{d(x_1 - \tilde{x}_1)}{dt} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} (x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} (x_n - \tilde{x}_n)$$

$$\frac{d(x_2 - \tilde{x}_2)}{dt} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} (x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} (x_n - \tilde{x}_n)$$

.

$$\frac{d(x_n - \tilde{x}_n)}{dt} = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} (x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} (x_n - \tilde{x}_n)$$

Nyní je potřeba rozlišovat Jacobiho matici původního systému, kterou označíme např. Df , a Jacobiho matici linearizovaného systému v daném pevném bodě, kterou označíme $Df(\tilde{x})$.

Zatímco Jacobiho matice původního nelineárního systému Df obsahuje proměnné a konstanty, Jacobiho matice linearizovaného systému $Df(\tilde{x})$ obsahuje pouze konstanty.

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad Df(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{\tilde{x}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{\tilde{x}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{\tilde{x}} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_{\tilde{x}} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{\tilde{x}} \end{bmatrix}$$

Příklad linearizace dynamického systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

System je popsán následující soustavou rovnic:

Pro nalezení pevných bodů položíme pravé strany rovny nule.

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x) = x_1 - x_2 = 0$$

Nalézáme dva pevné body:

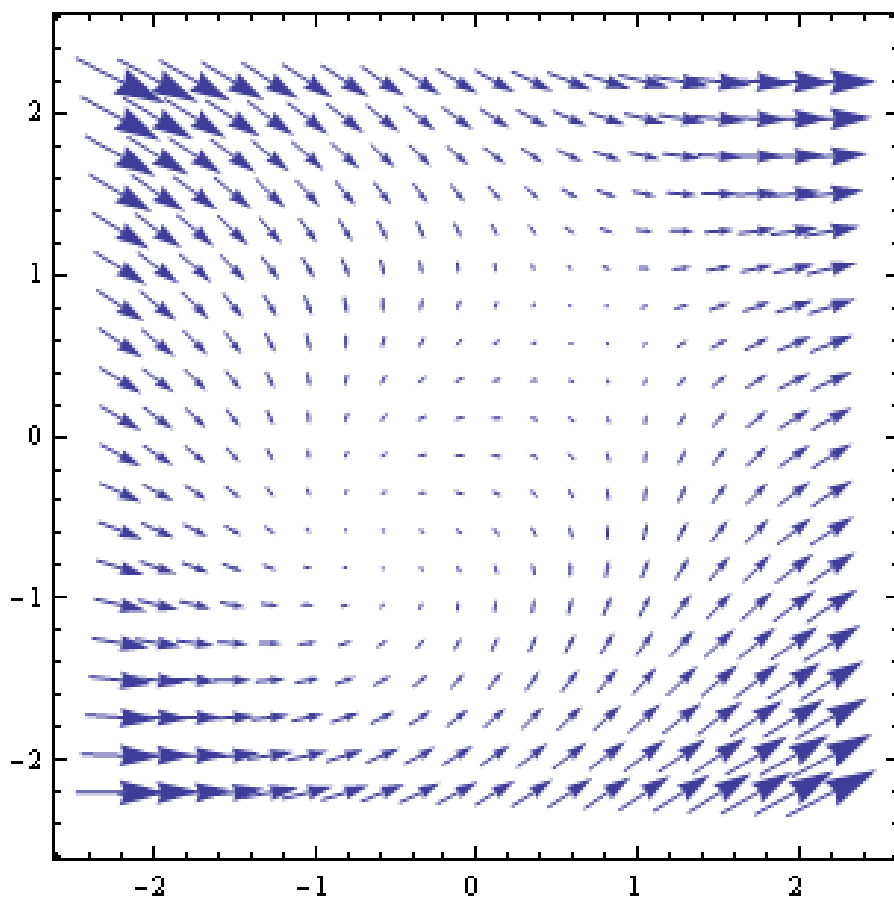
$$\tilde{x}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \quad a \quad \tilde{x}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.7 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

Nyní spočítáme derivace potřebné pro Jacobiho matici

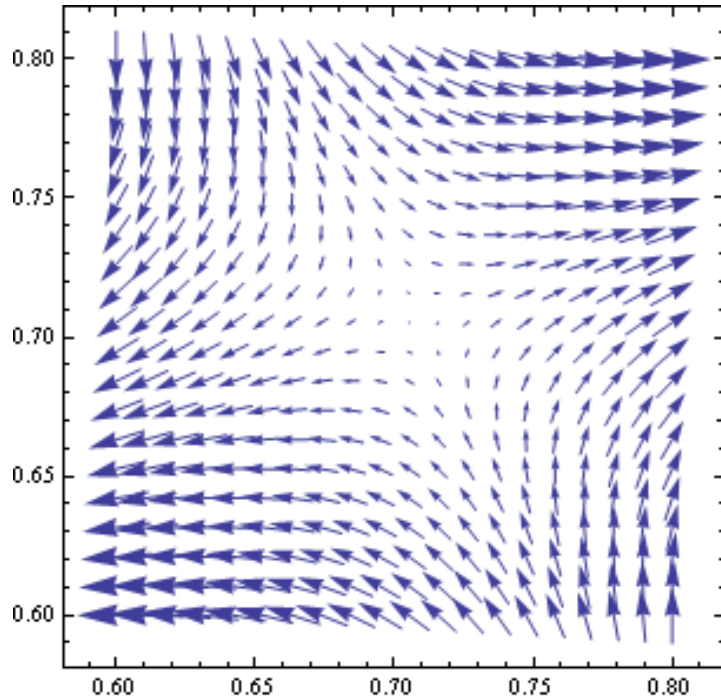
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

Před další analýzou stability jednotlivých pevných bodů si můžeme udělat náhled pomocí funkce `VectorPlot` programu Mathematica.

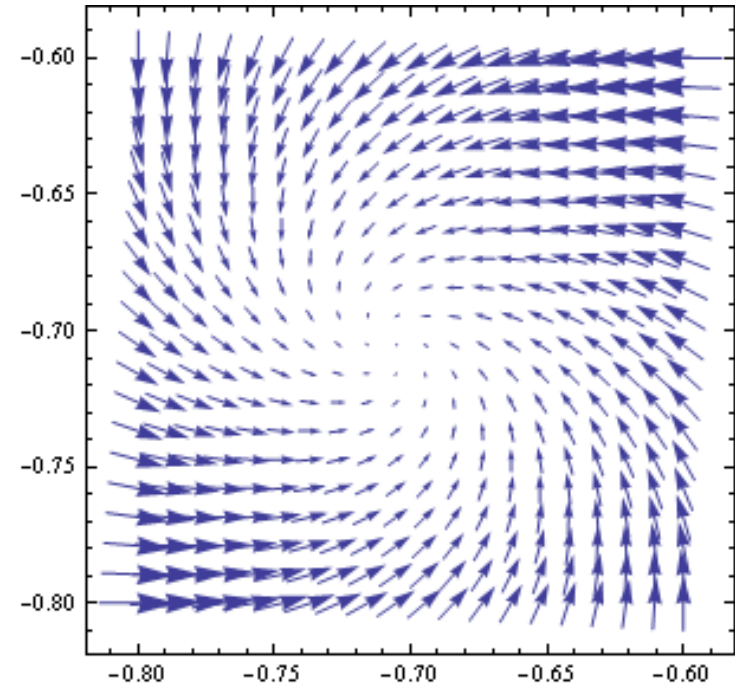
```
VectorPlot[{x1^2 + x2^2 - 1, x1 - x2}, {x1, -2.2, 2.2}, {x2, -2.2, 2.2},  
VectorPoints -> {20, 20}, VectorScale -> {0.1}, Background -> White]
```



Detailnější náhled okolí pevných bodů



Okolí pevného bodu x_A vypadá jako sedlový bod, tzn. pevný bod bude nestabilní.



Okolí pevného bodu x_B vypadá jako stabilní ohnisko, tzn. pevný bod bude stabilní.

Jacobiho matice původního systému:

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pro první pevný bod máme

$$\vec{\tilde{x}}_A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Df}(\vec{\tilde{x}}_A) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla vycházejí přibližně $\lambda_1=1.9016$ a $\lambda_2= -1.4874$

Závěr: systém se v okolí $x_A \sim$ chová jako lineární systém s jedním kladným a jedním záporným vlastním číslem, tzn. systém je zde **nestabilní**.

Pro druhý pevný bod máme

$$\vec{\tilde{x}}_B = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Df}(\vec{\tilde{x}}_B) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

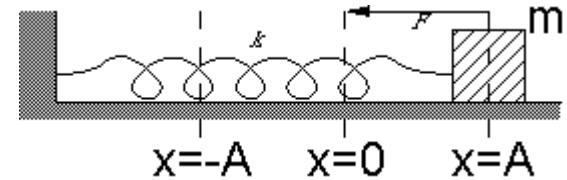
Vlastní čísla vycházejí přibližně $\lambda_{1,2}= -1.2071 \pm 1.171i$

Závěr: systém se v okolí $x_B \sim$ chová jako lineární systém s komplexně sdruženými vlastními čísly se zápornou reálnou částí, tzn. systém je zde **stabilní**.

Jak postupovat, pokud linearizace nerozhodne?

Příklad 2 – neobvykle tlumený harmonický oscilátor

Mějme harmonický oscilátor, u něž se těleso hmotnosti m pohybuje ve velmi viskózním médiu, u něž je tlumící síla závislá na třetí mocnině rychlosti.



Soustava diferenciálních rovnic popisující systém

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - \mu v^3 \end{cases}$$

Po zavedení vektorové proměnné y (stavový vektor) můžeme psát

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(y), \quad kde \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}(y) = f \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -x - \mu v^3 \end{bmatrix}$$

Výpočet pevných bodů

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ -x - \mu v^3 &= 0 \end{aligned}$$

Máme pouze jeden pevný bod

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiho matice

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3\mu v^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - \mu v^3 \end{cases}$$

Jacobiho matice pro
linearizovaný systém
v pevném bodě (0,0)

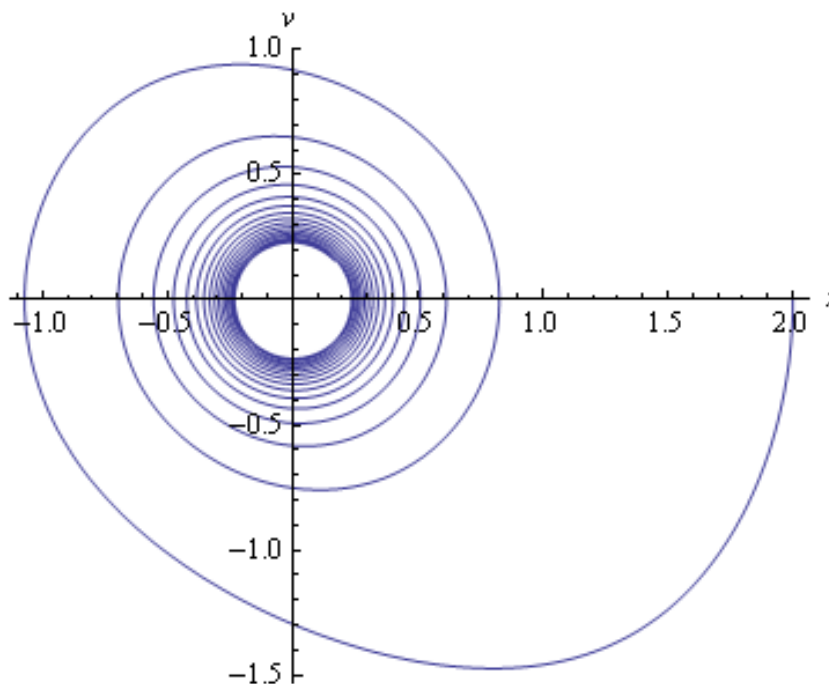
$$\mathbf{Df}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla tohoto systému jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$, tedy mají nulovou reálnou část.
Metoda linearizace tedy nedokáže o stabilitě rozhodnout.

Graf zobrazuje fázový portrét pro
hodnoty $\mu=0.25$, $x_0=2$ a $v_0=0$.

Ani z grafu není zřejmé, zda
trajektorie konverguje do bodu
(0,0) nebo zda zůstane v určité
nenulové vzdálenosti.

Musíme použít jiný nástroj –
Ljapunovy funkce



Druhá Ljapunovova metoda – Ljapunovovy funkce

Podíváme-li se na tlumený oscilátor z pohledu energie, je nám jasné, že systém neustále ztrácí energii, takže dříve či později se musí zastavit v pevném bodě (0,0).

Princip druhé Ljapunovovy metody spočívá v hledání funkce $V(\mathbf{x})$ - Ljapunovovy funkce, která představuje zobecněnou energii a splňuje následující podmínky.

1. funkce $V(\mathbf{x})$ je **spojitě diferencovatelná** v okolí pevného bodu

2. **Pozitivně definitní V** $V(\vec{x}) > 0$ pro všechna $\vec{x} \neq \vec{\tilde{x}}$ a $V(\vec{\tilde{x}}) = 0$

3. **Negativně definitní dV/dt** $\frac{dV(\vec{x})}{dt} < 0$ pro všechna \vec{x} ; $\frac{dV(\vec{\tilde{x}})}{dt} = 0$

Dodatečná podmínka pro 3: pro každý stav $\vec{x} \neq \vec{\tilde{x}}$ kde $\frac{dV}{dt} = 0$ je třetí

podmínka považována také za splněnou, pokud systém okamžitě přechází

do stavu, kde $\frac{dV}{dt} < 0$

Podaří-li se nám nalézt takovou funkci, potom je pevný bod x^* **stabilní**.

Aplikace druhé Ljapunovovy metody na našem Příkladu 2

Celková energie harmonického oscilátoru $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$

Zjednodušíme položením $m=1$ a $k=1$

$$E = \frac{1}{2} (x^2 + v^2)$$

Tato funkce je spojitě diferencovatelná v okolí nuly a je kladná pro všechny hodnoty proměnných s výjimkou pevného bodu (0,0), tzn. první a druhá podmínka jsou splněny. Máme tedy **Ljapunovovu kandidátskou funkci**.

Časová derivace E bude

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

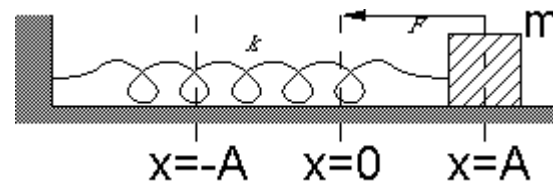
$$\frac{\partial E}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial E}{\partial v} = v; \quad \frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -x - \mu v^3$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -x - \mu v^3 \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = xv + v(-x - \mu v^3) = -\mu v^4$$

Konečný výsledek pro časovou derivaci je

$$\frac{dE}{dt} = -\mu v^4$$



Je vidět, že dE/dt je vždy záporná s výjimkou $v=0$, kde $dE/dt=0$. Rychlost je nulová ve třech případech:

1. V pevném bodě, což je v souladu s třetí podmínkou
2. V okamžiku, kdy je pružina maximálně stlačena
3. V okamžiku, kdy je pružina maximálně protažena

Situace 2 a 3 jsou v souladu s dodatečnou podmínkou, neboť systém okamžitě přechází do stavu, kde $dE/dt < 0$. Tedy je splněna také třetí podmínka.

Závěr: naše Ljapunovova kandidátská funkce splňuje všechny podmínky pro Ljapunovovu funkci, tudíž vyšetřovaný pevný bod $(0,0)$ **je stabilní**.

Jak odhadnout Ljapunonovu kandidátskou funkci?

Jedná-li se o fyzikální systém, měli bychom počítat s energií. Je-li stavový vektor \mathbf{x} a pevným bodem je $\mathbf{0}$, můžeme zkusit

$$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

Pokud pevný bod neleží v počátku souřad. systému, použijeme modifikaci

$$V(\vec{x}) = (x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (x_2 - \tilde{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \tilde{x}_n)^2$$

Nejsme-li úspěšní, můžeme zkusit

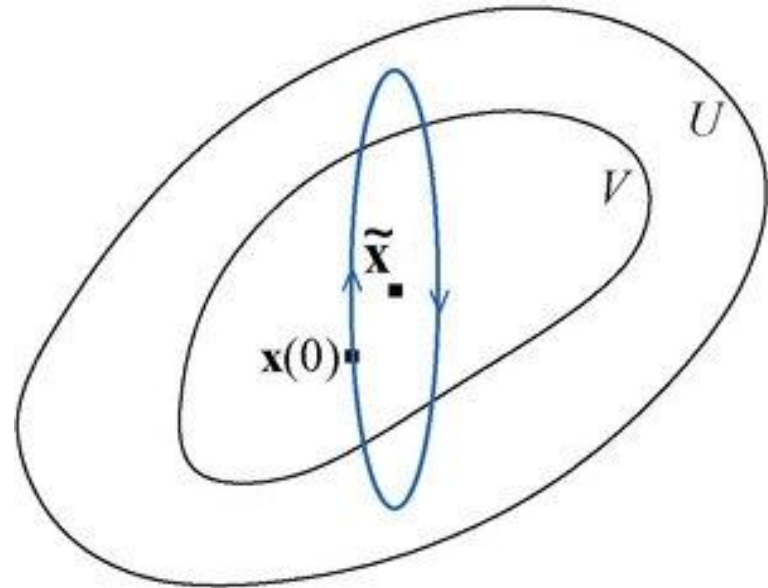
$$V(\vec{x}) = a_1(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + a_2(x_2 - \tilde{x}_2)^2 + \dots + a_n(x_n - \tilde{x}_n)^2$$

Nevede-li k cíli ani předchozí metoda, zkusíme obecnou kvadratickou formu

$$V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)$$

Klasifikace stability nelineárních systémů

1. **Ljapunovská stabilita:** pevný bod \tilde{x} je stabilní, jestliže pro každé okolí U bodu \tilde{x} existuje takové okolí $V \subseteq U$, pro které každé řešení $x(t)$ začínající ve V zůstává pro všechny časy $t \geq 0$ v okolí U .



Ljapunovská stabilita pevného bodu znamená, že řešení, které má počátek dostatečně blízko pevného bodu, také dostatečně blízko zůstane.

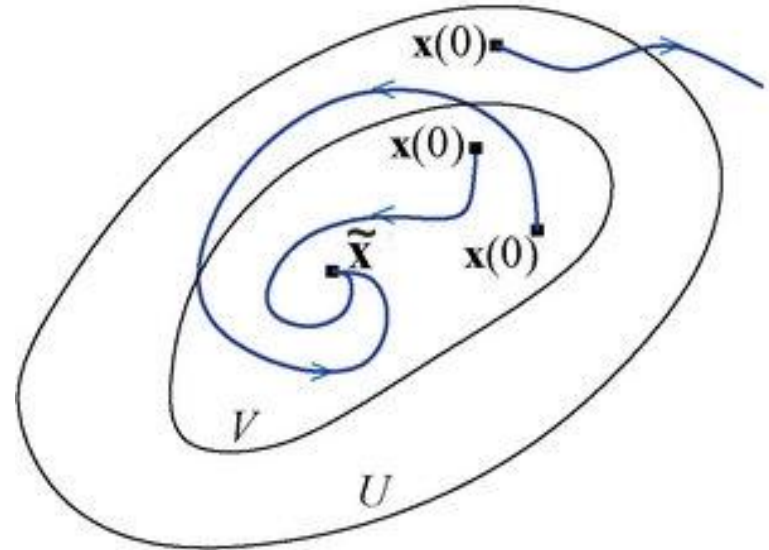
Takový pevný bod je považován za **Ljapunovsky stabilní** nebo také neutrálně stabilní.

V tomto případě je třetí podmínka pro Ljapunovskou funkci splněna, pokud $dV/dt \leq 0$. Jinak řečeno, časová derivace musí být negativně semidefinitní.

2. **Asymptotická stabilita:** pevný bod \tilde{x} je asymptoticky stabilní, pokud je Ljapunovsky stabilní a navíc lze vybrat oblast V tak, aby platilo

$$|x(t) - \tilde{x}| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty$$

Pro všechna $x(0) \in V$



Asymptotická stabilita znamená, že řešení, které má počátek dostatečně blízko pevného bodu, nejenom dostatečně blízko zůstane, ale také bude k tomuto bodu konvergovat

Takový pevný bod je považován za **asymptoticky stabilní**.

V tomto případě je třetí podmínka pro Ljapunovskou funkci splněna, pokud $dV/dt < 0$. Jinak řečeno, časová derivace musí být negativně definitní.

3. **Exponenciální stabilita:** pevný bod \tilde{x} je exponenciálně stabilní, pokud existuje takové okolí V bodu \tilde{x} a taková konstanta $a > 0$, aby platilo

$$|x(t) - \tilde{x}| < e^{-at} \quad \text{pro } t \rightarrow \infty \quad \text{pro všechna } x(0) \in V$$

Exponenciální stabilita znamená, že řešení nejenom konverguje k pevnému bodu, ale konverguje rychleji než exponenciální funkce $\text{Exp}(-at)$.

Exponenciálně stabilní pevné body jsou také asymptoticky stabilní a tudíž i Ljapunovsky stabilní.

Bifurkace

Bifurkace – kvalitativní změna topologie fázového portréту oblasti atrakce uskutečnitelná změnou řídicího parametru při průchodu jeho kritickou hodnotou.

Rozlišujeme dva základní typy bifurkací:

Globální bifurkace – její účinky nejsou omezeny na okolí bodu nebo cyklu ve fázovém prostoru. Nelze je detekovat pouze analýzou stability pevných bodů.

Lokální bifurkace – její účinky jsou omezeny na okolí bodu nebo cyklu ve fázovém prostoru. Pevné body se mohou díky změně parametru systému objevovat, zanikat, měnit svůj počet, stabilitu nebo i typ. Tento typ bifurkace může být analyzován pomocí změn ve stabilitě pevných bodů, limitních cyklů nebo jiných atraktorů.

Logistická rovnice

Logistická rovnice, také známá jako Verhulstova rovnice, je vztah, který aproximuje vývoj zvířecí populace v čase.

Na rozdíl od bakteriálního modelu se podmínky pro zvířecí populaci v průběhu roku výrazně mění. Různé druhy jsou březí v různou dobu, ne každý jedinec se rozmnožuje, jsou zde vlivy okolního prostředí apod. Z těchto důvodů je lepší takový systém popisovat pomocí diskrétního dynamického systému a diferenční rovnicí (rovnice) spíše než spojitým systémem a rovnicemi diferenciálními.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad \text{nebo} \quad x_{n+1} = r x_n - r x_n^2$$

kde x_n je aktuální populace v daném roce, x_{n+1} je populace v následujícím roce a r je parametr udávající rychlost růstu i úhynu populace. Hodnota $x=0$ znamená mrtvou populaci, hodnota $x=1$ znamená populaci na své maximální hodnotě.

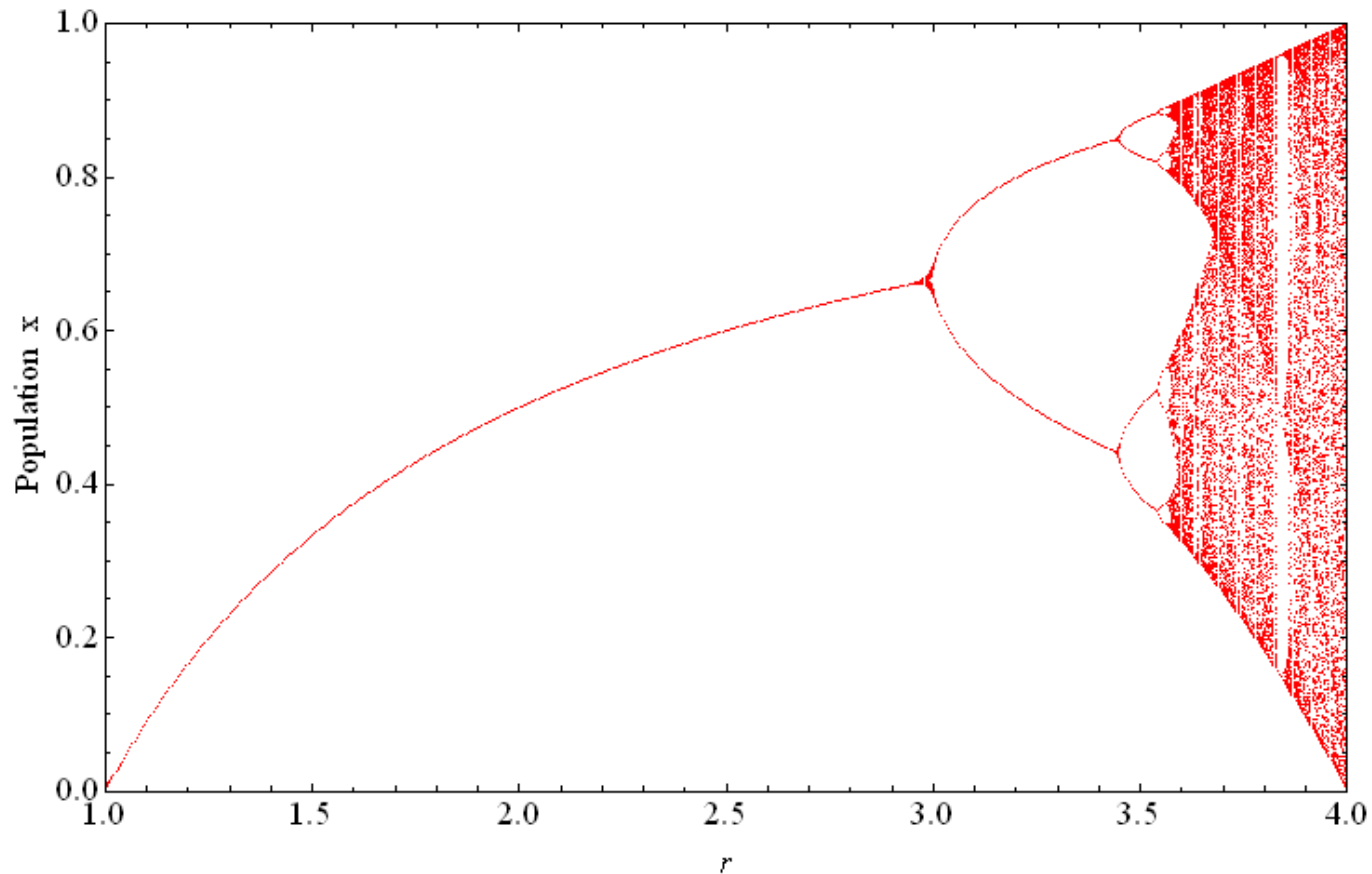
Nyní zkusíme vyšetřit, co se bude dít, pokud budeme měnit parametr r .

Jedinou jistotou je, že pro nulovou populaci na počátku $x(0)=0$ budeme mít pro jakékoli r jediný stabilní pevný bod znamenající mrtvou populaci.

Vývoj populace pro různé hodnoty r .

$r = 0,5$	$r = 0,8$	$r = 1,0$	$r = 1,5$	$r = 1,5$	$r = 2,5$	$r = 3,2$	$r = 3,5$	$r = 3,55$
0,5	0,5	0,5	0,5	0,2	0,5	0,5	0,5	0,5
0,125	0,2	0,2500	0,375	0,2400	0,6250	0,8000	0,8750	0,8875
0,0547	0,128	0,1875	0,3616	0,2736	0,5859	0,5120	0,3828	0,3544
0,0258	0,0893	0,1523	0,3419	0,2981	0,6065	0,7995	0,8269	0,8123
0,0126	0,0651	0,1291	0,3375	0,3139	0,5966	0,5129	0,5009	0,5413
0,0062	0,0487	0,1125	0,3354	0,3230	0,6017	0,7995	0,8750	0,8814
0,0031	0,037	0,0998	0,3344	0,3280	0,5992	0,5130	0,3828	0,3710
0,0015	0,0285	0,0898	0,3338	0,3306	0,6004	0,7995	0,8269	0,8284
0,0008	0,0222	0,0818	0,3336	0,3320	0,5998	0,5130	0,5009	0,5047
0,0004	0,0173	0,0751	0,3335	0,3327	0,6001	0,7995	0,8750	0,8874
0,0002	0,0136	0,0695	0,3334	0,3330	0,5999	0,5130	0,3828	0,3547
0,0001	0,0108	0,0646	0,3334	0,3332	0,6000	0,7995	0,8269	0,8125
0	0,0085	0,0605	0,3333	0,3332	0,6000	0,5130	0,5009	0,5408
0	0,0068	0,0568	0,3333	0,3333	0,6000	0,7995	0,8750	0,8816
0	0,0054	0,0536	0,3333	0,3333	0,6000	0,5130	0,3828	0,3706
0	0,0043	0,0507	0,3333	0,3333	0,6000	0,7995	0,8269	0,8280
0	0,0034	0,0481	0,3333	0,3333	0,6000	0,5130	0,5009	0,5055
0	0,0027	0,0458	0,3333	0,3333	0,6000	0,7995	0,8750	0,8874
0	0,0022	0,0437	0,3333	0,3333	0,6000	0,5130	0,3828	0,3547
0	0,0017	0,0418	0,3333	0,3333	0,6000	0,7995	0,8269	0,8126
0	0,0014	0,0401	0,3333	0,3333	0,6000	0,5130	0,5009	0,5406
0	0,0011	0,0385	0,3333	0,3333	0,6000	0,7995	0,8750	0,8816
0	0,0009	0,0370	0,3333	0,3333	0,6000	0,5130	0,3828	0,3704

Bifurkační diagram pro logistickou rovnici



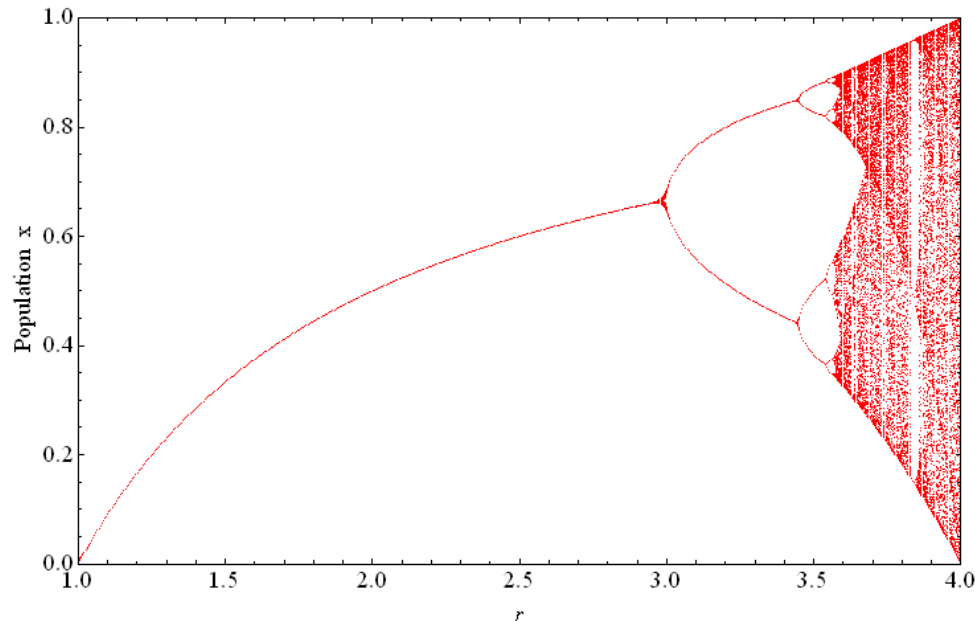
Graf je výstupem z programu Mathematica. Pro každé r bylo počítáno s počáteční hodnotou $x(0)=0.1$ a bylo provedeno 300 iterací.

První **bifurkace** se objevuje pro hodnotu $r=3$ (zdvojení funkční závislosti). Další bifurkace následují pro $r=3.449$, $r=3.544$ atd.

Bifurkační diagram logistické rovnice lze rozdělit na 4 oblasti

1. **Extinkce** ($r < 1$): je-li růst nižší než 1, potom živočišný druh vyhyne
2. **Oblast pevných bodů** ($1 < r < 3$): řada konverguje k jediné hodnotě pro jakékoli nenulové počáteční x_0
3. **Oblast oscilací** ($3 < r < 3.57$): řada osciluje mezi dvěma či více hodnotami.
4. **Oblast chaosu** ($3.57 < r < 4$): populace může nabývat jakékoli hodnoty, a to v nepředvídatelném pořadí.

Pro vyšší hodnoty r ($r > 4$) všechna řešení divergují k nekonečnu a modelové aspekty této funkce jsou již nepoužitelné.



Základní typy lokálních bifurkací

- | |
|--|
| 1. Sedlo uzel (bifurkace fold) |
| 2. Zdvojování periody (bifurkace flip) |
| 3. Bifurkace typu vidle |
| 4. Transkritická bifurkace |
| 5. Hopfova bifurkace |

1. Bifurkace sedlo-uzel (fold)

U této bifurkace vznikají při snižování r dva pevné body a vzdalují se od sebe, případně se přibližují a zanikají při rostoucím r .

Pro $r < 0$ máme dva pevné body:

stabilní pro

$$x = -\sqrt{-r}$$

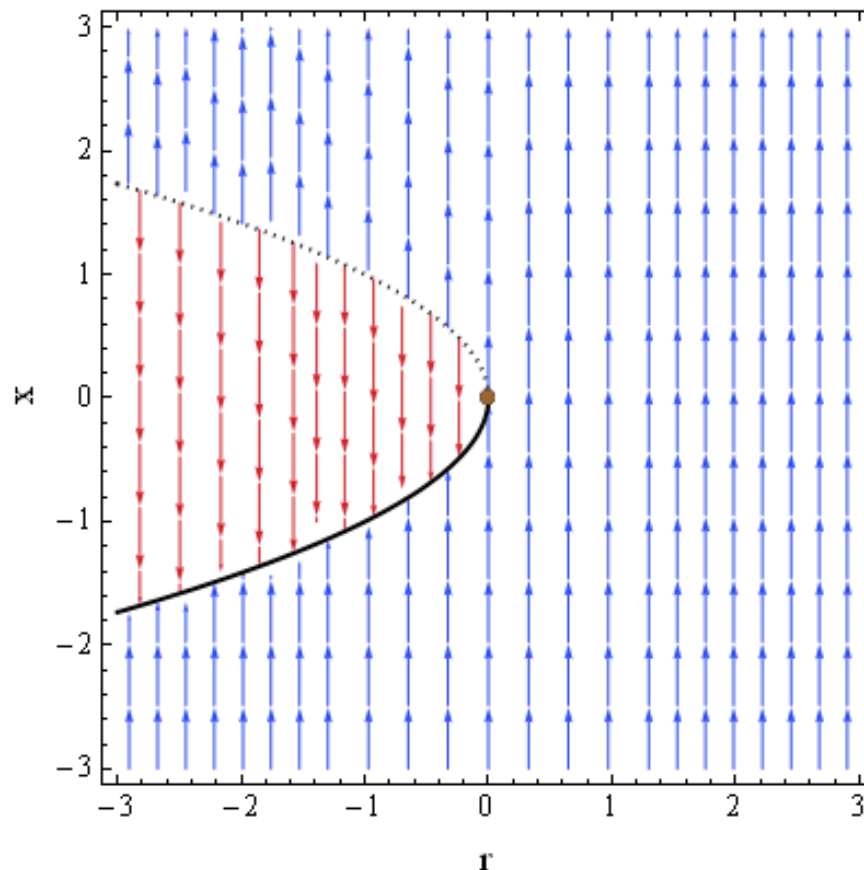
nestabilní pro

$$x = +\sqrt{-r}$$

Pro $r > 0$ nejsou žádné pevné body

Diferenciální rovnice systému

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2$$



Název této bifurkace je lépe patrný z 2D příkladu pro $r = -2$

Diferenciální rovnice
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = -2 + x_2^2$$

Pevné body
$$\tilde{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \tilde{x}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Jacobiho matice
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

Linearizovaná Jacobiho matice pro \tilde{x}_A
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla pro tuto Jacobiho matici
$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 2\sqrt{2}$$

Závěr: pevný bod \tilde{x}_A je **sedlovým bodem**, neboť máme reálná vlastní čísla opačných znamének.

Linearizovaná Jacobiho matice pro $x_{B\sim}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla pro tuto Jacobiho matici $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2\sqrt{2}$

Závěr: pevný bod $x_{B\sim}$ je **stabilním uzlem**, neboť máme dvě reálná vlastní čísla opačných znamének.

Název této bifurkace je tedy odvozen od této dvojice pevných bodů – **sedlo a uzel**.

Příklad bifurkace sedlo-uzel pro

$$\frac{dx}{dt} = r - x^2$$

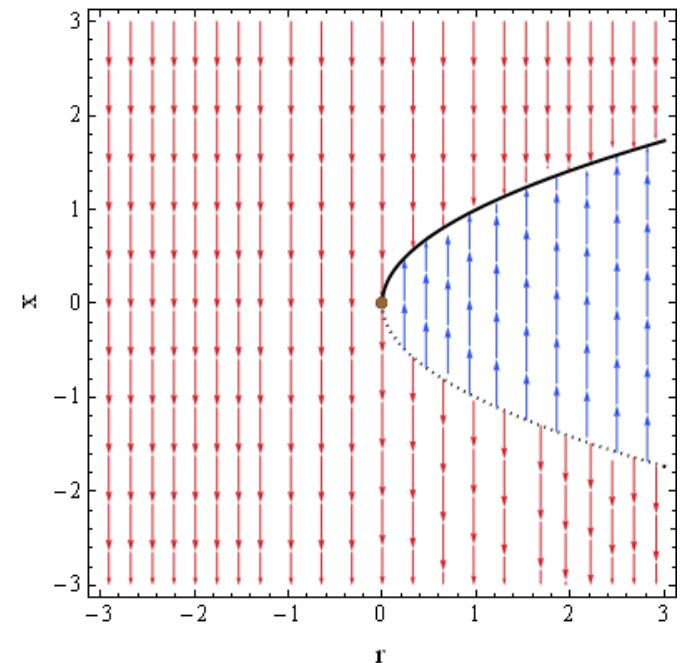
Pevné body budou tentokrát dány

$$x = -\sqrt{r}$$

nestabilní

$$x = +\sqrt{r}$$

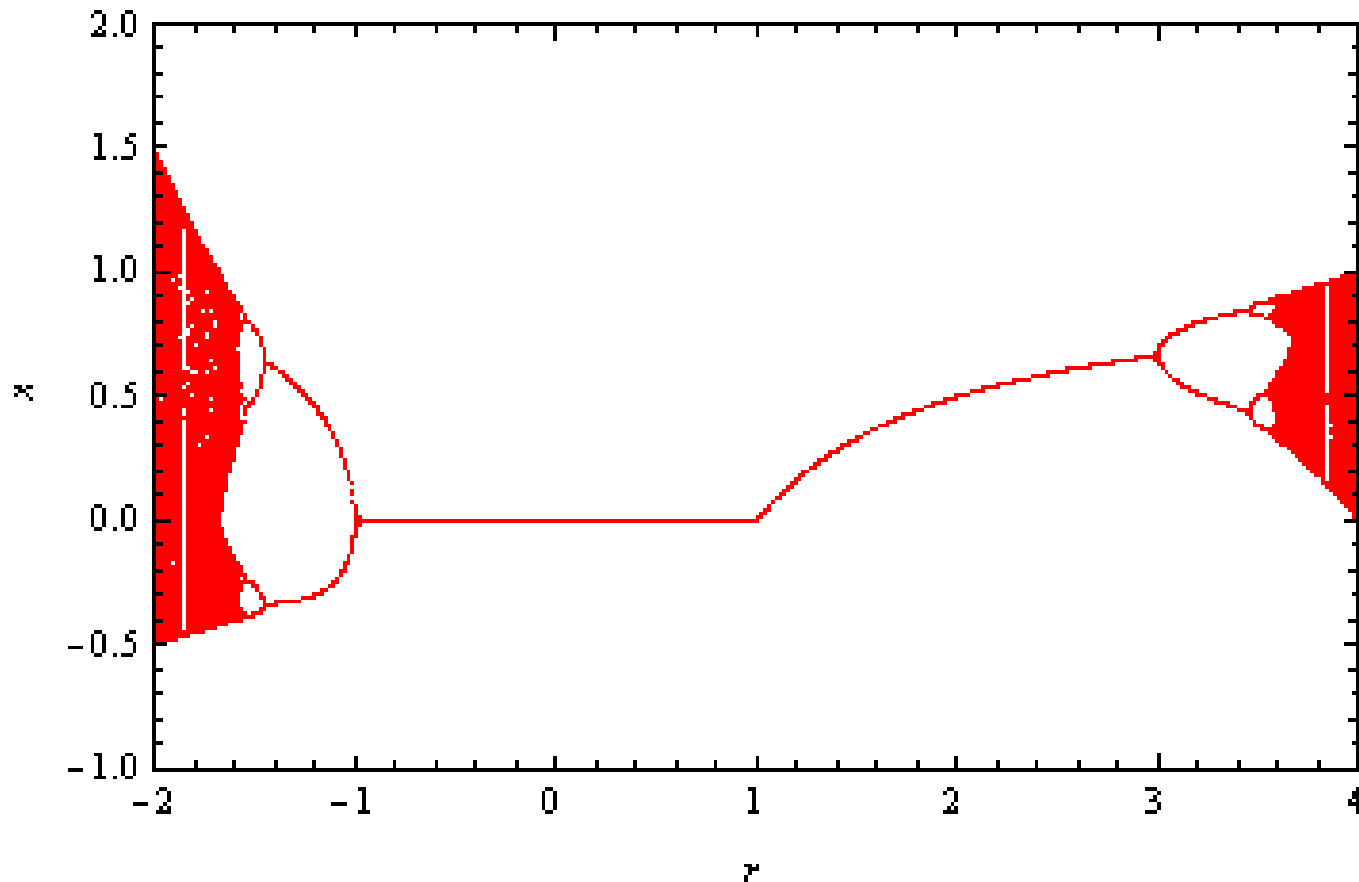
stabilní



2. Zdvojování periody (bifurkace flip)

Tento typ bifurkace můžeme pozorovat u logistické rovnice. Budeme-li akceptovat i záporné hodnoty r , vidíme v levé části grafu **půlení periody** a v pravé části **zdvojování periody**.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$



3a. Bifurkace typu vidle

Superkritický případ

U této bifurkace se při rostoucím r jeden pevný bod rozdělí na tři další.

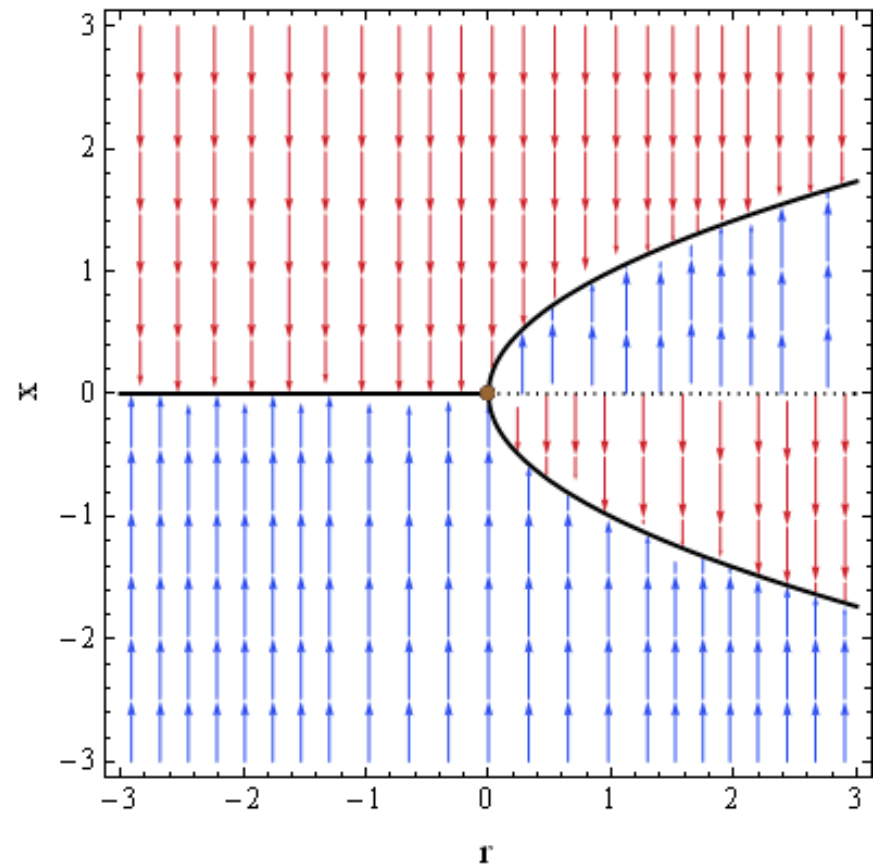
Pro $r < 0$ máme pouze jediný pevný bod pro $x=0$

Pro $r > 0$ máme jeden nestabilní pevný bod pro $x=0$ a dva stabilní pevné body pro

$$x = \pm\sqrt{r}$$

Diferenciální rovnice systému

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3$$



3b. Bifurkace typu vidle

Subkritický případ

U této bifurkace se při rostoucím r tři pevné body sloučí do jednoho.

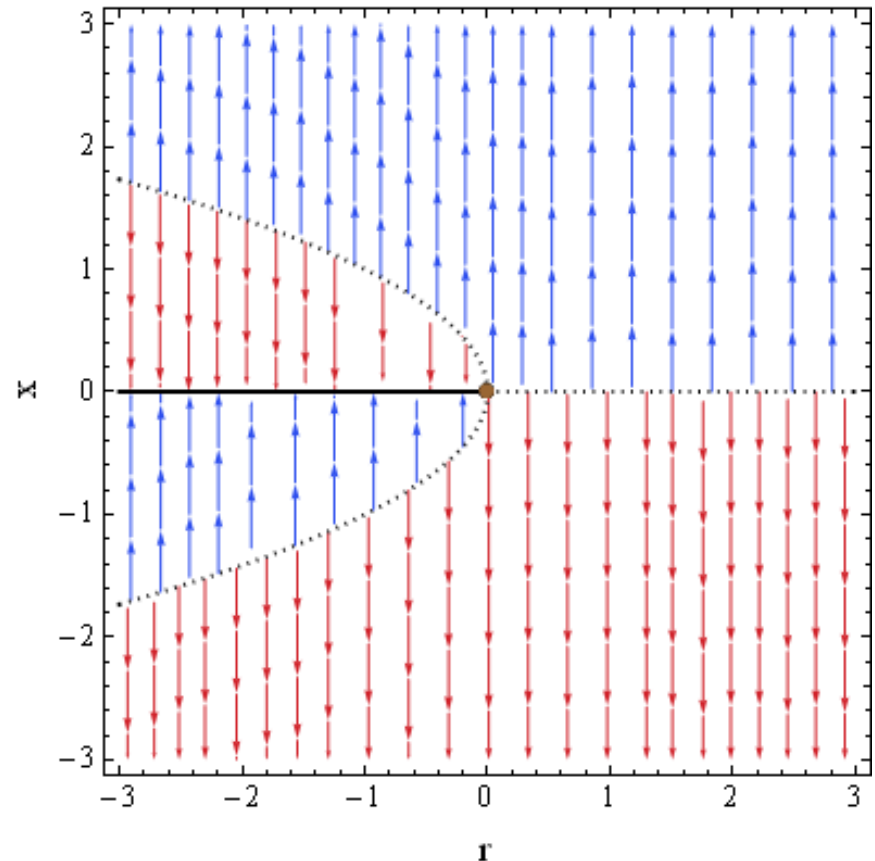
Pro $r > 0$ máme jediný pevný bod pro $x=0$

Pro $r < 0$ máme jeden stabilní pevný bod pro $x=0$ a dva nestabilní pevné body pro

$$x = \pm\sqrt{-r}$$

Diferenciální rovnice systému

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3$$



4. Transkritická bifurkace

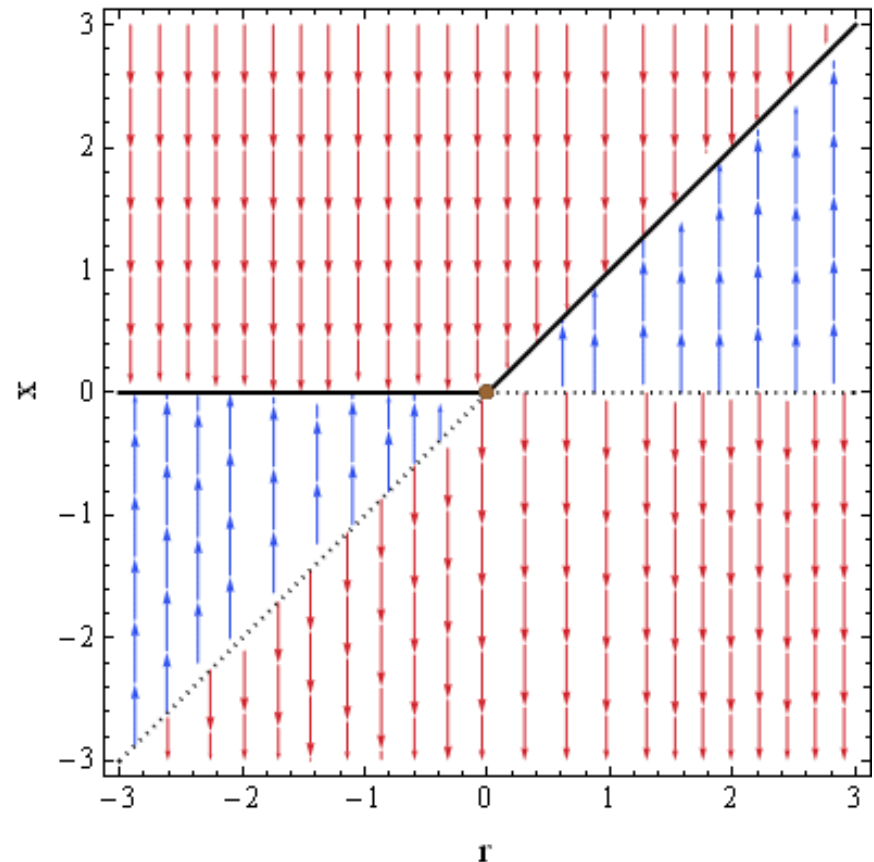
U této bifurkace máme jeden stabilní a jeden nestabilní pevný bod. Tyto pevné body si po průchodu parametru r nulou „vymění svou stabilitu“.

Pro $r < 0$ máme stabilní pevný bod pro $x=0$ a nestabilní pevný bod pro $x=r$

Pro $r > 0$ máme nestabilní pevný bod pro $x=0$ a stabilní pevný bod pro $x=r$

Diferenciální rovnice systému

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2$$



5. Hopfova bifurkace

Jedná se o dvourozměrnou bifurkaci. U této bifurkace se změnou parametru r jediný pevný bod mění na limitní cyklus a naopak.

Diferenciální rovnice systému

$$\frac{dx_1}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + rx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Máme jediný pevný bod

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jacobiho matice

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} r - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & r - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Linearizovaná Jacobiho matice

$$\mathbf{Df}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} r & -1 \\ 1 & r \end{bmatrix}$$

Výpočet vlastních čísel

$$\det(\mathbf{D}f(\tilde{x}) - \lambda \mathbf{E}) = (r - \lambda)^2 + 1$$

$$\lambda^2 - 2r\lambda + r^2 + 1 = 0$$

Řešení charakteristické rovnice dává dva komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4(r^2 + 1)}}{2} = r \pm i$$

Z předchozí zkušenosti můžeme říci, že pro $r < 0$ máme stabilní pevný bod a pro $r > 0$ máme nestabilní pevný bod (alespoň v bezprostředním okolí bodu).

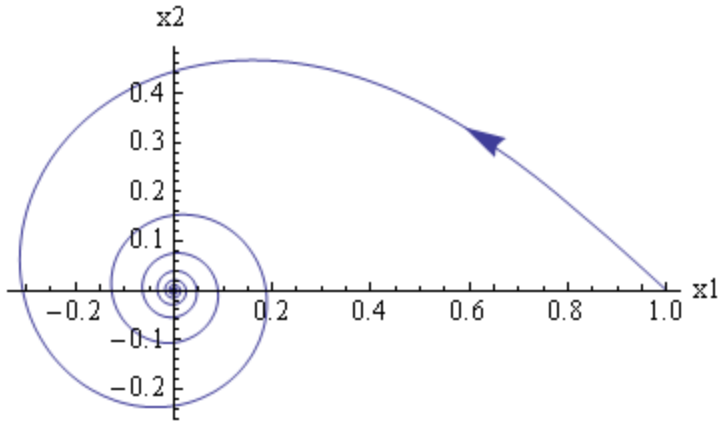
Abychom mohli rozhodnout o $r = 0$ musíme použít Ljapunovovy funkce, přičemž jako kandidátskou funkci vybereme

$$V(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

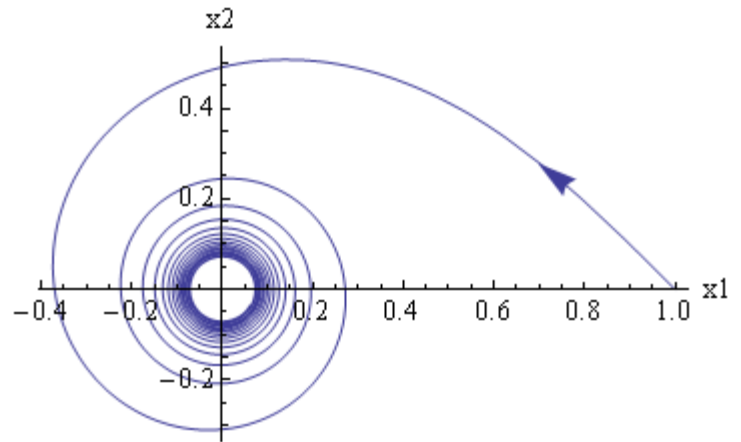
$$\frac{dV}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = \dots = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 + 2r(x_1^2 + x_2^2)$$

Vidíme, že pro $r = 0$ je dV/dt mimo pevný bod vždy záporné, tudíž máme Ljapunovovu funkci. Můžeme tedy říci, že pro $r = 0$ je pevný bod **Ljapunovsky stabilní** a také **asymptoticky stabilní**.

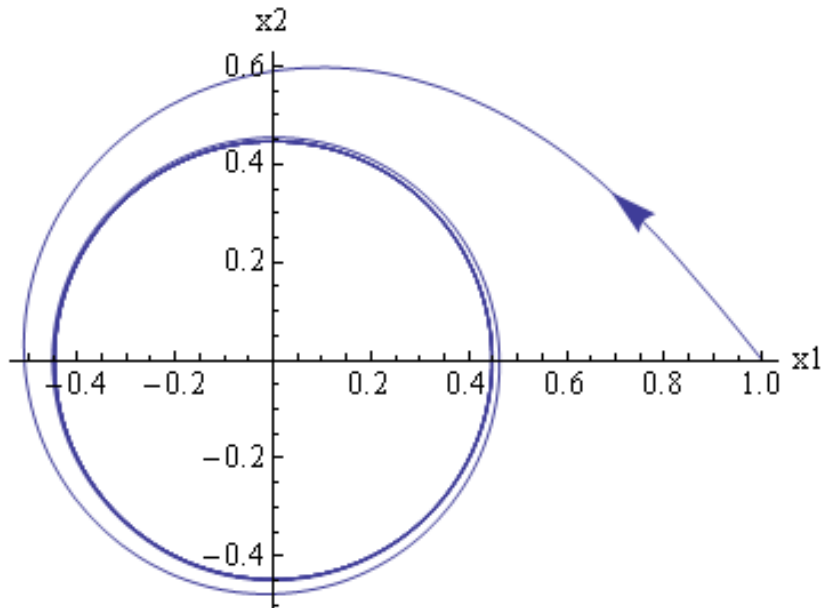
Fázový portrét pro $r=-0.1$,
 $x_{10}=1$ a $x_{20}=0$



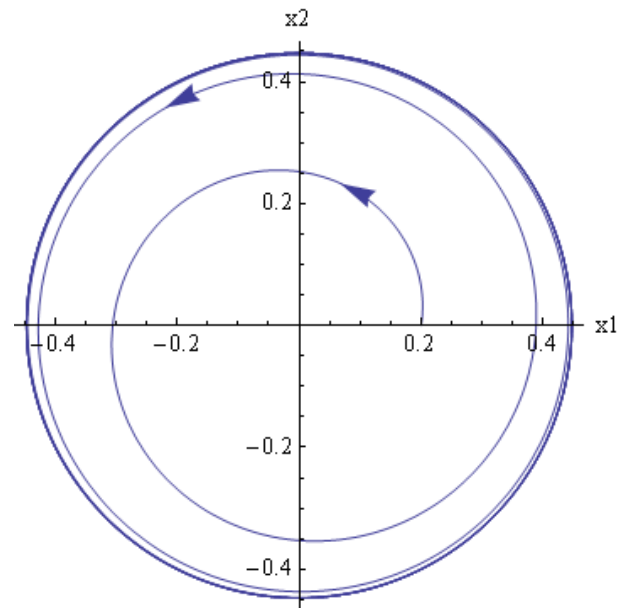
Fázový portrét pro $r=0$,
 $x_{10}=1$ a $x_{20}=0$



Fázový portrét pro $r=+0.1$,
 $x_{10}=1$ a $x_{20}=0$



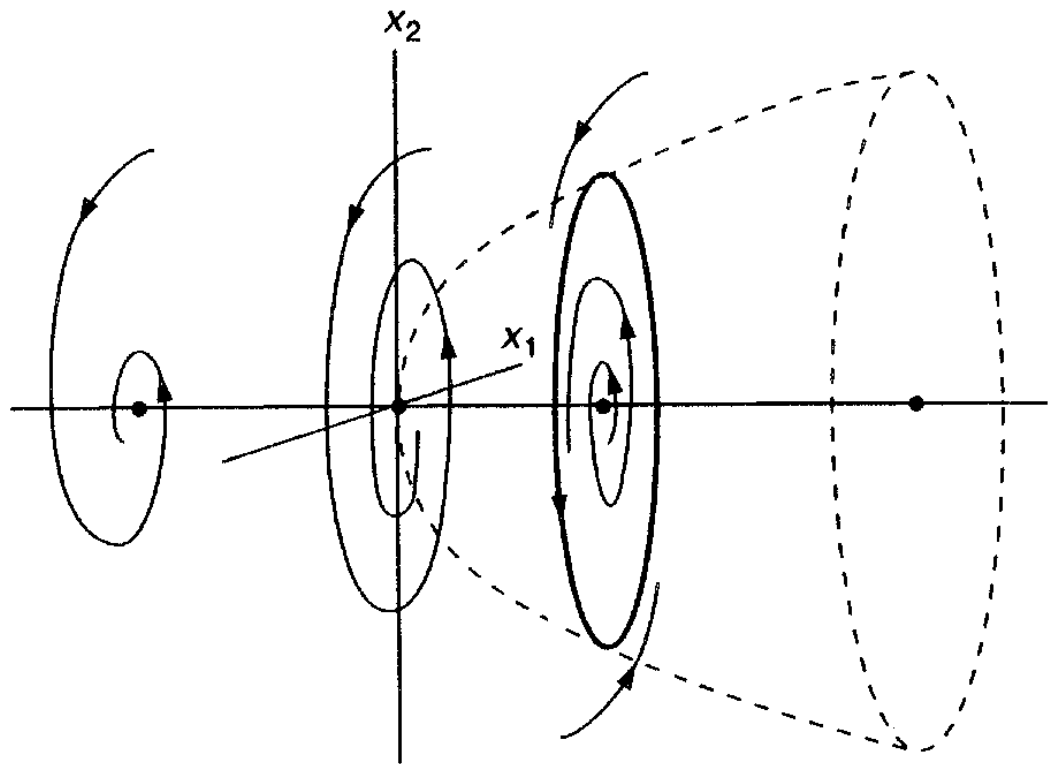
Fázový portrét pro $r=+0.1$,
 $x_{10}=0.2$ a $x_{20}=0$



3D interpretace Hopfovy bifurkace.

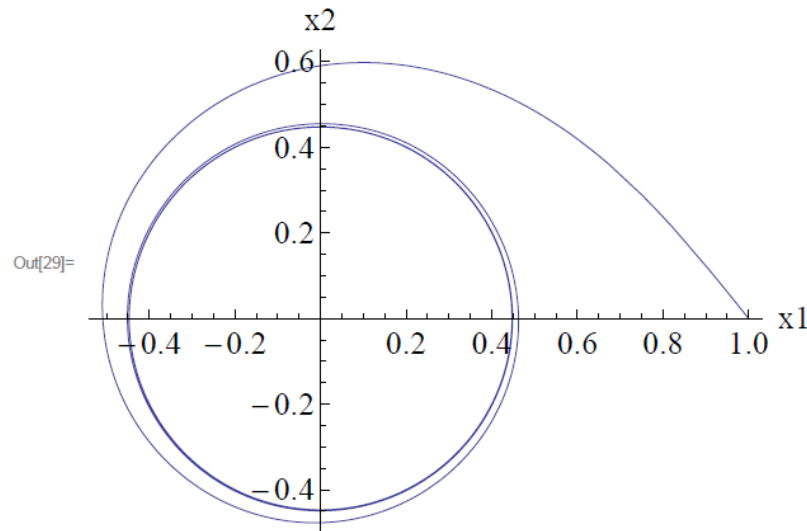
Pro záporné hodnoty r systém konverguje k pevnému bodu $(0,0)$, který je atraktorem, pro $r=0$ konverguje k tomuto bodu rovněž, ale velmi pomalu.

Pro kladné hodnoty r atraktorem není nestabilní pevný bod $(0,0)$, ale **limitní cyklus**, a to bez ohledu na počáteční bod, tzn. nezáleží, zda začínáme uvnitř nebo vně cyklu. Poloměr limitní smyčky roste s rostoucím r .



Výpočet Hopfovy bifurkace v programu [Mathematica](#)

```
In[22]:= r = 0.2;  
tend = 100;  
eqn1 = x1'[t] - r * x1[t] + x2[t] + x1[t]^3 + x1[t] * x2[t]^2 == 0;  
eqn2 = x2'[t] - x1[t] - r * x2[t] + x2[t]^3 + x2[t] * x1[t]^2 == 0;  
eqn3 = x1[0] == 1.0;  
eqn4 = x2[0] == 0;  
  
In[28]:= sol = NDSolve[{eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}, {x1, x2}, {t, 0, tend}];  
  
In[29]:= ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], x2[t]} /. sol], {t, 0, tend}, PlotRange -> All,  
Background -> White, AxesLabel -> {x1, x2}, LabelStyle -> Directive[16]]
```

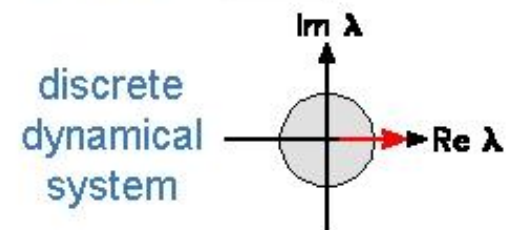
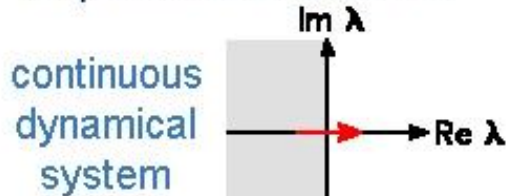


Obecná pravidla pro bifurkace.

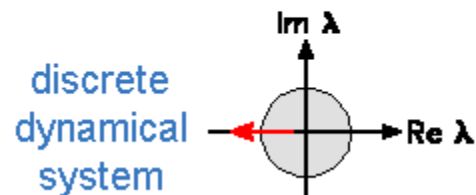
Spojité systémy: k lokální bifurkaci dochází tehdy, když má vlastní číslo **nulovou reálnou část**. Je-li vlastní číslo **nulové**, potom mluvíme o bifurkaci typu sedlo-uzel, vidle nebo o transkritické. Mají-li vlastní čísla nulovou reálnou část, a jsou **komplexně sdružená**, jedná se o Hopfovu bifurkaci.

Diskrétní systémy: k lokální bifurkaci dochází, pokud je velikost vlastního čísla **rovna jedné**. Je-li vlastní číslo **+1**, potom se jedná o sedlo-uzel, vidle nebo transkritickou bifurkaci. Je-li vlastní číslo **-1**, jedná se o zdvojení periody. Pokud jsou vlastní čísla komplexně sdružená s velikostí jedna, jedná se o Hopfovu bifurkaci.

Saddle-node, transcritical
or pitchfork bifurcation



period doubling
bifurcation



Hopf bifurcation

