Dynamické systémy 1

Úvod

Ing. Jaroslav Jíra, CSc.

Definice

Dynamický systém je systém, který se mění v čase podle souboru pevně daných pravidel, která určují, jakým způsobem dojde ke změně jednoho stavu v druhý.

Dynamický systém je tvořen stavovým prostorem a souborem funkcí, které popisují změnu tohoto systému v čase.

Dvě části dynamického systému

a) **Stavový prostor** určuje, jakých hodnot může nabývat stavový vektor dynamického systému. Stavový vektor je tvořen množinou proměnných, které mohou nabývat hodnot z určitého intervalu, přičemž interval všech těchto hodnot potom určuje celý stavový prostor.

b) **Funkce** nám při známém výchozím stavu systému říkají, jaký stav bude následovat v příštím časovém okamžiku.

Stavový vektor může být popsán např.

$$\vec{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)]$$

Funkce může být popsána jedinou funkcí nebo jejich souborem

$$f_1(x_1, x_2, \ldots., x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots., x_n), \ldots.,\ f_n(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

Celý systém může být potom popsán soustavou diferenciálních rovnic – pohybovými rovnicemi

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

.

.

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

Klasifikace dynamických systémů

Dynamický systém může být	
buď	anebo
Lineární	Nelineární
Autonomní	Neautonomní
Konzervativní	Nekonzervativní
Diskrétní	Spojitý
Jendorozměrný	Vícerozměrný

Lineární systém – funkce popisující chování systému musí splňovat dvě základní podmínky

- aditivita $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- homogenita $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Příklad: f(x) = 3x; f(y) = 3y;

- aditivita f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)
- homogenita 5 * f(x) = 5* 3x = 15x = f(5x)

Nelineární systém je popsán nelineární funkcí a nesplňuje předchozí dvě podmínky.

Příklad: $f(x) = x^2$; $f(y) = y^2$;

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq f(x) + f(y) = x^2 + y^2$$

$$f(5x) = (5x)^2 = 25x^2 \neq 5f(x) = 5x^2$$

Autonomní systém je takový systém, který nezávisí na nezávisle proměnné. Je-li nezávisle proměnnou čas, říkáme takovému systém časově invariantní.

Podmínka: jestliže pro vstupní veličinu **x(t)** je výstupem veličina **y(t)**, potom jakýkoli časový posun vstupu **x(t + δ)** má za následek stejný časový posun výstupu **y(t + δ)**

Příklad: máme dva systémy

Systém A: $y(t) = t\,x(t)$ Systém B: $y(t) = 10x(t)$

Systém A:

Nejprve zpozdíme vstup o δ

$$x_d(t) = x(t+\delta)$$
$$y(t) = t\,x_d(t)$$
$$y_1(t) = t\,x_d(t) = t\,x(t+\delta)$$

Zpozdíme-li výstup o δ

$$y(t) = t\,x_d(t)$$
$$y_2(t) = y(t+\delta) = (t+\delta)x(t+\delta)$$

Je zřejmé, že $y_1(t) \neq y_2(t)$, tudíž zkoumaný systém není časově invariantní neboli je **neautonomní**.

Systém B:

Nejprve zpozdíme vstup o δ

$$x_d(t) = x(t+\delta)$$
$$y(t) = 10\,x_d(t)$$
$$y_1(t) = 10\,x_d(t) = 10\,x(t+\delta)$$

Zpozdíme-li výstup o δ

$$y(t) = 10\,x_d(t)$$
$$y_2(t) = y(t+\delta) = 10\,x(t+\delta)$$

Je zřejmé, že $y_1(t) = y_2(t)$ tudíž systém je časově invariantní neboli je **autonomní**.

Konzervativní systém - celková mechanická energie zůstává konstantní, nejsou žádné ztráty. Příkladem je netlumený harmonický oscilátor.

Nekonzervativní systém – celková mechanická energie se v čase mění díky ztrátám způsobeným např. třením nebo odporem prostředí. Příkladem jsou tlumené kmity, reálné kyvadlo.

Diskrétní systém – je popsán diferenční rovnicí nebo jejich soustavou. V případě jediné rovnice mluvíme také o jednorozměrné mapě. Čas je u těchto rovnic nahrazen proměnnou **k**, která označuje k-tý krok ve výpočtu. Systém je typicky popsán rovnicemi:

$$x(0) = x_0$$

$$x(k+1) = f(x(k))$$

$$x(k) = f^k(x_0)$$

Takovýto systém se řeší iteračním výpočtem. Typickým příkladem je výpočet stavu bankovního konta po k letech od vložení. Je-li úvodní vklad 100000 Kč a úrok činí 3%, potom lze systém popsat rovnicemi:

$$x(0) = 100000$$

$$x(k+1) = 1.03x(k)$$

$$x(k) = 1.03^k * 100000$$

Spojitý systém – je popsán diferenciální rovnicí nebo jejich soustavou.

$$x(0) = x_0$$
$$x' = f(x)$$

Příkladem je svislý vrh popsaný počátečními podmínkami h(0), v(0) a rovnicemi

$$h(t)' = v(t)$$
$$v(t)' = -g$$

kde **h** je výška a **v** je rychlost tělesa.

Definice z Mathematiky: Tam, kde se pracuje s reálnými čísly, mluvíme o spojitém systému, a kde se pracuje s celými čísly, mluvíme o diskrétním systému.

Jednorozměrný systém je popsán jedinou funkcí, např.

$$x(k+1) = ax(k) + b$$

$$x'(t) = ax(t) + b$$

kde a,b jsou konstanty.

Vícerozměrný systém je popsán vektorem funkcí, např.

$$\vec{x}(k+1) = \mathbf{A}\vec{x}(k) + \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{\mathbf{B}}$$

kde ***x*** je n-rozměrný vektor, **A** je matice o rozměrech *n x n* a **B** je vektor konstant

Opakování z maticové algebry

Matice A Matice B Vektor C

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A.}\vec{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{bmatrix}$$

Jednotková matice,
Používá se symbol ***E*** nebo ***I***

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinant

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{D}) = d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Inverzní matice – 2x2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverzní matice – 3x3

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & K \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} A = (ek - fh) & D = (ch - bk) & G = (bf - ce) \\ B = (fg - dk) & E = (ak - cg) & H = (cd - af) \\ C = (dh - eg) & F = (bg - ah) & K = (ae - bd) \end{array}$$

Základní maticové operace v programu Mathematica

Zadani matice

```
A = {{6, 8, 13}, {21, 22, 23}, {31, 20, 33}}
```

```
{{6, 8, 13}, {21, 22, 23}, {31, 20, 33}}
```

```
B = {{6, 4, 13}, {20, 21, 22}, {35, 32, 33}};
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 20 & 33 \end{pmatrix}$$

Jednotkova matice

```
IdentityMatrix[3] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soucin matic

```
A.B
```

{{651, 608, 683}, {1371, 1282, 1516}, {1741, 1600, 1932}}

Inverzni matice

```
Inverse[A]
```

$$\left\{\left\{-\frac{133}{825}, \frac{2}{825}, \frac{17}{275}\right\}, \left\{-\frac{2}{165}, \frac{41}{330}, -\frac{9}{110}\right\}, \left\{\frac{131}{825}, -\frac{64}{825}, \frac{6}{275}\right\}\right\}$$

Stopa matice

```
Tr[A]
```

61

Determinant

```
Det[A]
```

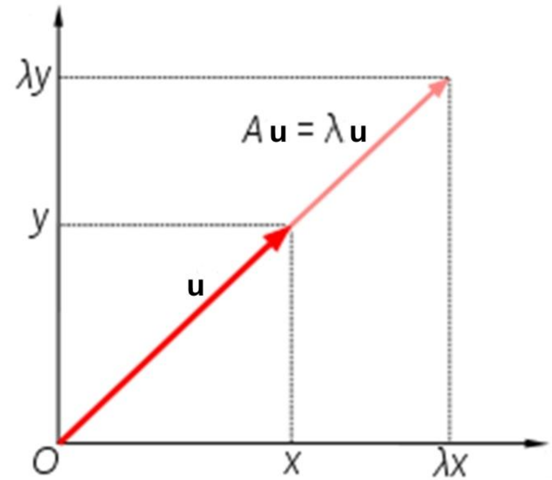
-1650

Vlastní čísla a *Vlastní vektory*

Vlastní vektory čtvercové matice jsou takové nenulové vektory, které po vynásobení maticí zůstávají úměrné původnímu vektoru (mění se jen velikost, nikoli směr). K vlastnímu vektoru přísluší vlastní číslo λ, které představuje tentýž násobný faktor, jako když vektor vynásobíme maticí.

Je-li **u** vlastním vektorem matice **A**, potom po vynásobení vektoru touto maticí dostaneme stejný výsledek jako po vynásobení vektoru číslem λ.

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$$



Pro výpočet vlastního čísla používáme vztah

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Máme-li již λ, vlastní vektor vypočteme ze vzorce: $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\vec{u}=\vec{0}$

Příklad pro dvourozměrný systém:
$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\vec{0}$$

Pokud jsme nalezli vlastní vektory a vlastní čísla, můžeme říci, že jsme nalezli diagonální matici, která je podobná původní matici. Diagonální matice má z hlediska řešení stability dynamických systémů tytéž vlastnosti jako matice původní. Diagonální matici zapisujeme ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Jaké jsou výhody diagonální matice?

1. Máme vícerozměrný diskrétní systém.

Typická diferenční rovnice:

$$\vec{x}(k+1) = \mathbf{A}\vec{x}(k)$$

Výpočet k-tého prvku:

$$\vec{x}(k) = \mathbf{A}^k \vec{x}(0)$$

Umocňování matic, zejména vyšších řádů, je výpočetně velmi náročné. V případě diagonální matice je však výpočet velmi jednoduchý:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^{\,k} \end{bmatrix}$$

2. Vícerozměrný spojitý systém.

Typická diferenciální rovnice:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}\vec{x}(t)$$

Řešení rovnice:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \exp(\mathbf{A}t)$$

Počítání s maticemi v exponenciální funkci je ještě náročnější než jejich umocňování. V případě diagonální matice je to však opět velmi jednoduché:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Příklad výpočtu vlastního čísla a vlastního vektoru

Původní matice $$A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

Charakteristická rovnice $$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=\det\begin{bmatrix}4-\lambda & 2\\ 1 & 5-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$(4-\lambda)(5-\lambda)-2=\lambda^2-9\lambda+18=0$$

Vlastní čísla $$\lambda_1=6;\lambda_2=3$$

Vlastní vektory

$$\begin{bmatrix}4-\lambda_1 & 2\\ 1 & 5-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0$$

$$-2u_1+2u_2=0$$

$$u_1-u_2=0$$

$$\vec{u}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4-\lambda_2 & 2\\ 1 & 5-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0$$

$$u_1+2u_2=0$$

$$u_1+2u_2=0$$

$$\vec{u}_2=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

Jakýkoli vektor splňující podmínku $u_1=u_2$ je vlastním vektorem pro $\lambda=6$

Jakýkoli vektor splňující podmínku $u_1=-2u_2$ je vlastním vektorem pro $\lambda=3$

Výpočet vlastních čísel a vektorů v Mathematice

```
In[13]:= A = {{4, 2}, {1, 5}}

Out[13]= {{4, 2}, {1, 5}}

In[14]:= Eigenvalues[A]

Out[14]= {6, 3}

In[15]:= Eigensystem[A]

Out[15]= {{6, 3}, {{1, 1}, {-2, 1}}}
```

Stopa matice představuje součet prvků na její hlavní diagonále

$$Tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} \qquad Tr\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \\ -8 & 4 & -2 \end{bmatrix} = 6$$

Jacobiho matice je matice všech prvních parciálních derivací vektorové či skalární funkce podle jednotlivých proměnných. Tato matice se obvykle značí **J**, **D**f nebo **A.**

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$.$$

$$.$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Fázové portréty

Fázový prostor je prostor všech možných stavů systému, přičemž každý možný stav je reprezentován jedinečným bodem ve fázovém prostoru.

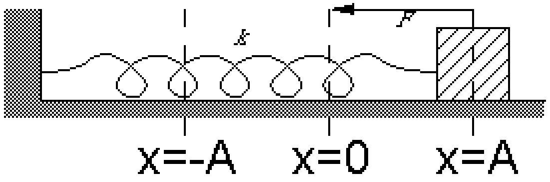
Dvourozměrný fázový prostor se nazývá **fázová rovina**. Typicky se používá v klasické mechanice při jednorozměrném pohybu hmotného bodu, kde na jednotlivých osách máme polohu a rychlost.

Křivka, po které se reprezentativní bod ve fázovém prostoru pohybuje, se nazývá **fázová křivka**.

Fázový portrét je geometrickou reprezentací fázových křivek ve fázové rovině. Každá kombinace počátečních podmínek je reprezentována jinou křivkou či bodem.

Fázový portrét netlumeného harmonického oscilátoru

Diferencální rovnice $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$



kde x je výchylka, A je amplituda
a ω je úhlová frekvence.
Dále zavedeme rychlost v (dx/dt)

Řešením rovnice je:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t)$$

Nyní osamostatníme sinovou a kosinovou funkci, umocníme obě rovnice na druhou a nakonec je sečteme.

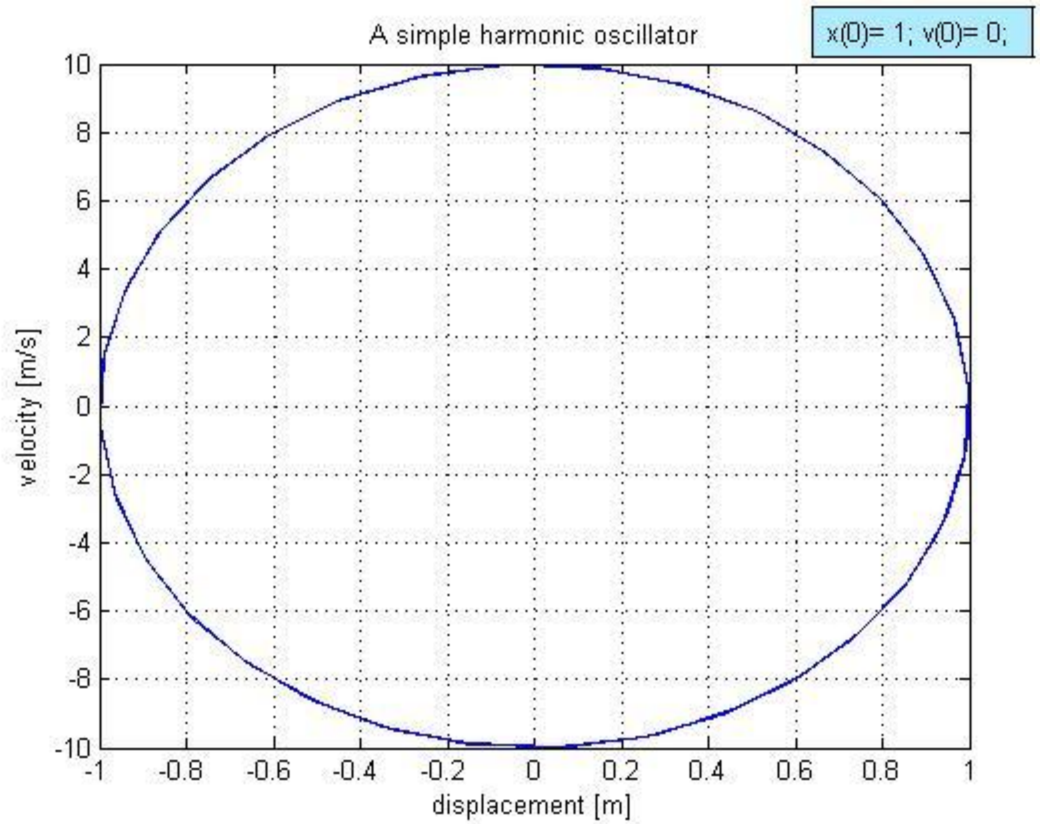
$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t) \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \cos^2(\omega t)$$
$$\frac{v}{\omega A} = -\sin(\omega t) \qquad \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = \sin^2(\omega t)$$

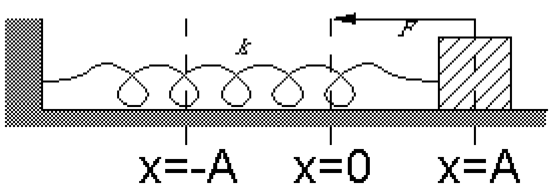
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

Výsledná rovnice popisuje elipsu

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1$$

Následující obrázek zobrazuje fázový portrét netlumeného harmonického oscilátoru pro ω=10 s^{-1} s počátečními podmínkami x(0)=1 m; v(0)=0 m/s

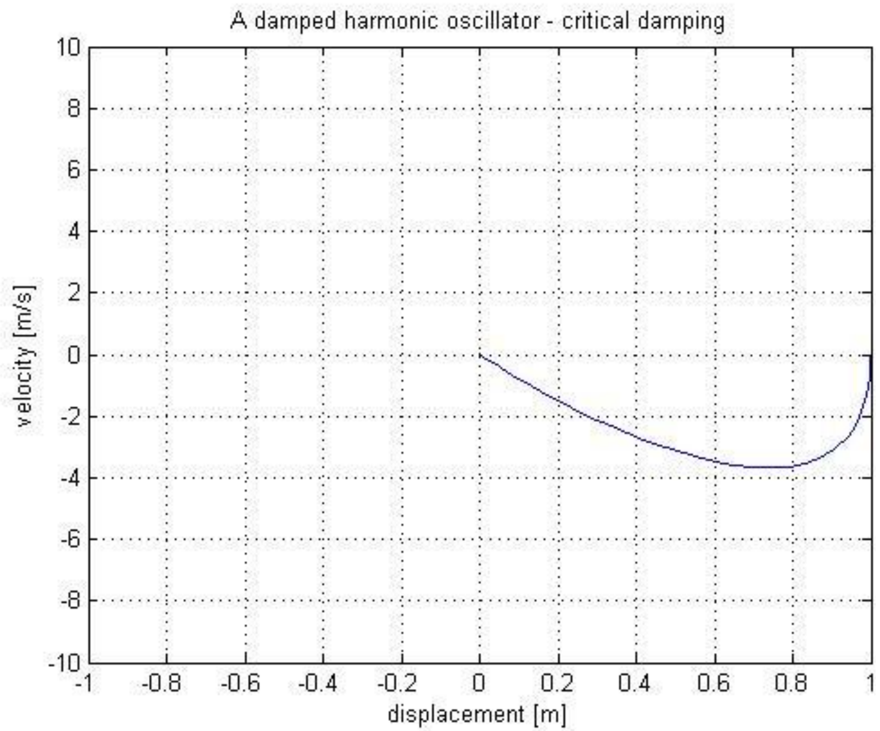


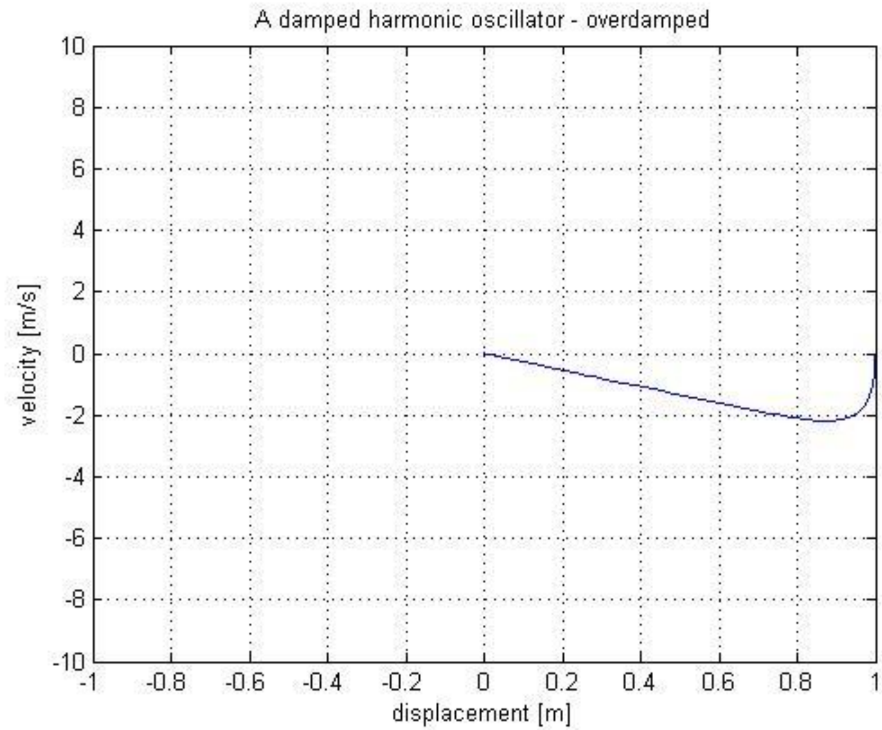


$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{v}{10}\right)^2 = 1$$

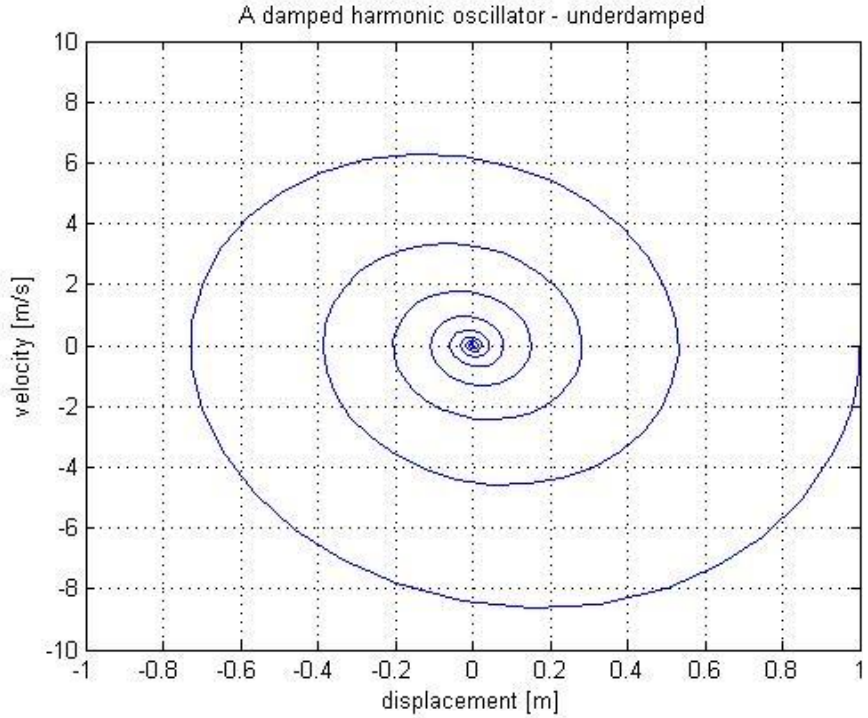
Kriticky tlumený oscilátor
$\omega = 10 s^{-1}$; $\delta = 10 s^{-1}$
$x(0)=1 m$; $v(0)=0$ m/s

Přetlumený oscilátor
$\omega = 10 s^{-1}$; $\delta = 20 s^{-1}$
$x(0)=1 m$; $v(0)=0$ m/s

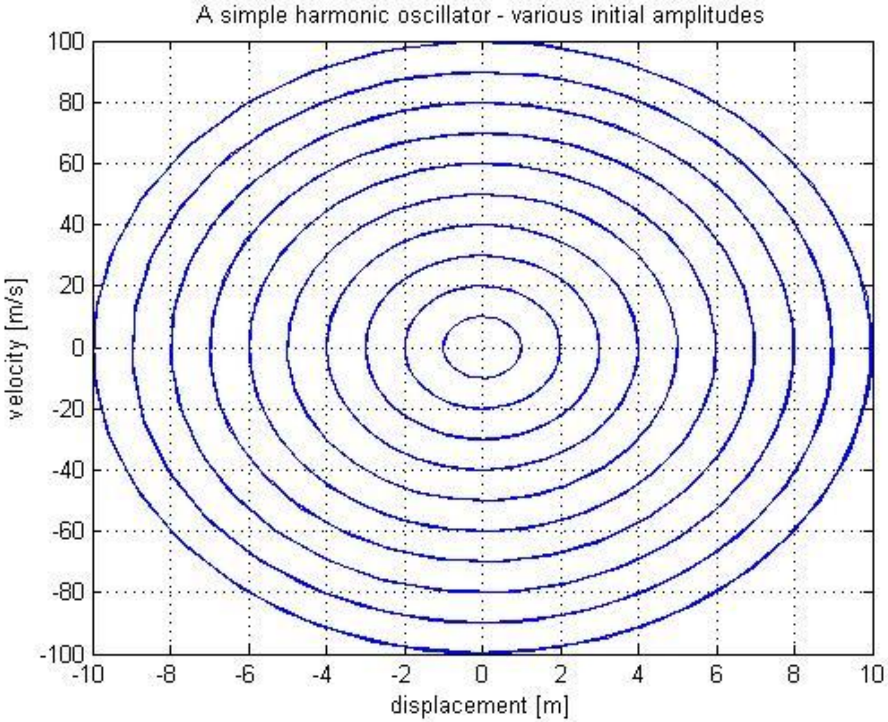




Podtlumený oscilátor
$\omega = 10 s^{-1}$; $\delta = 1 s^{-1}$
$x(0) = 1 m$; $v(0) = 0 m/s$



Netlumený oscilátor pro počáteční amplitudy 1,2, …,10 m



Vytvoření fázového portrétu v programu Mathematica

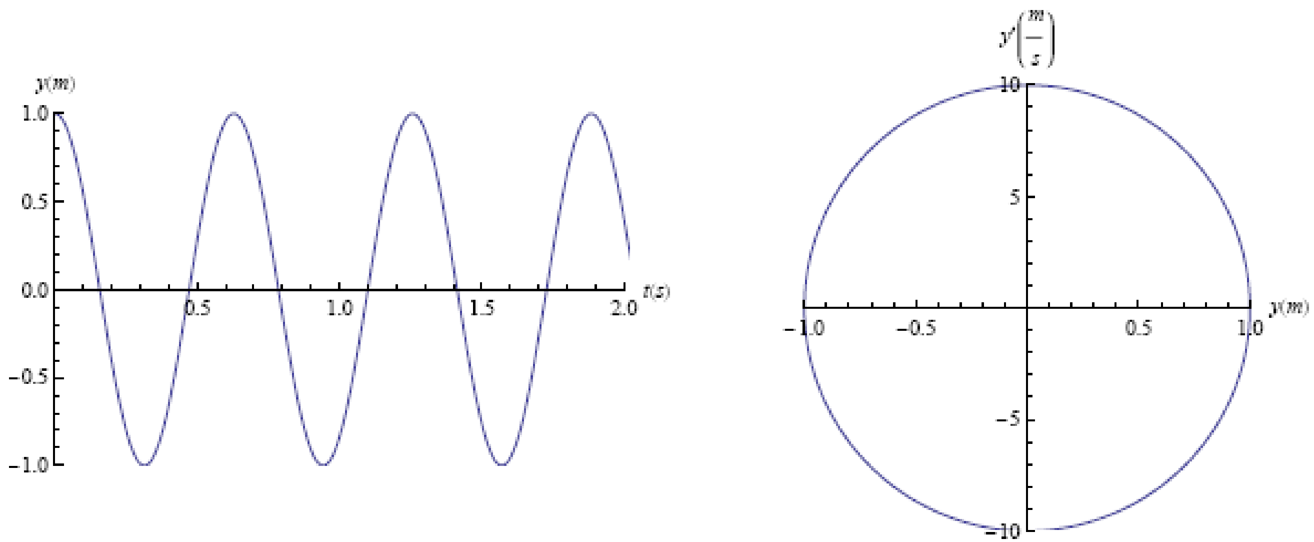
```
In[174]:= delta = 0;

In[175]:= w = 10;
          eqn1 = y''[t] + 2 * delta * y'[t] + w^2 y[t] == 0;
          eqn2 = y[0] == 1;
          eqn3 = y'[0] == 0;

In[179]:= sol = DSolve[{eqn1, eqn2, eqn3}, y, t]

Out[179]= {{y → Function[{t}, Cos[10 t]]}}

In[181]:= GraphicsArray[{Plot[{y[t]} /. sol, {t, 0, 3},
              PlotRange → {{0, 2}, {-1, 1}}, AxesLabel → {t[s], y[m]}],
            ParametricPlot[{y[t] /. sol, y'[t]} /. sol, {t, 0, 3}, PlotRange →
              {{-1, 1}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1, AxesLabel → {y[m], y'[m / s]}]}]
```



In[185]:=
```
delta = 2;
```

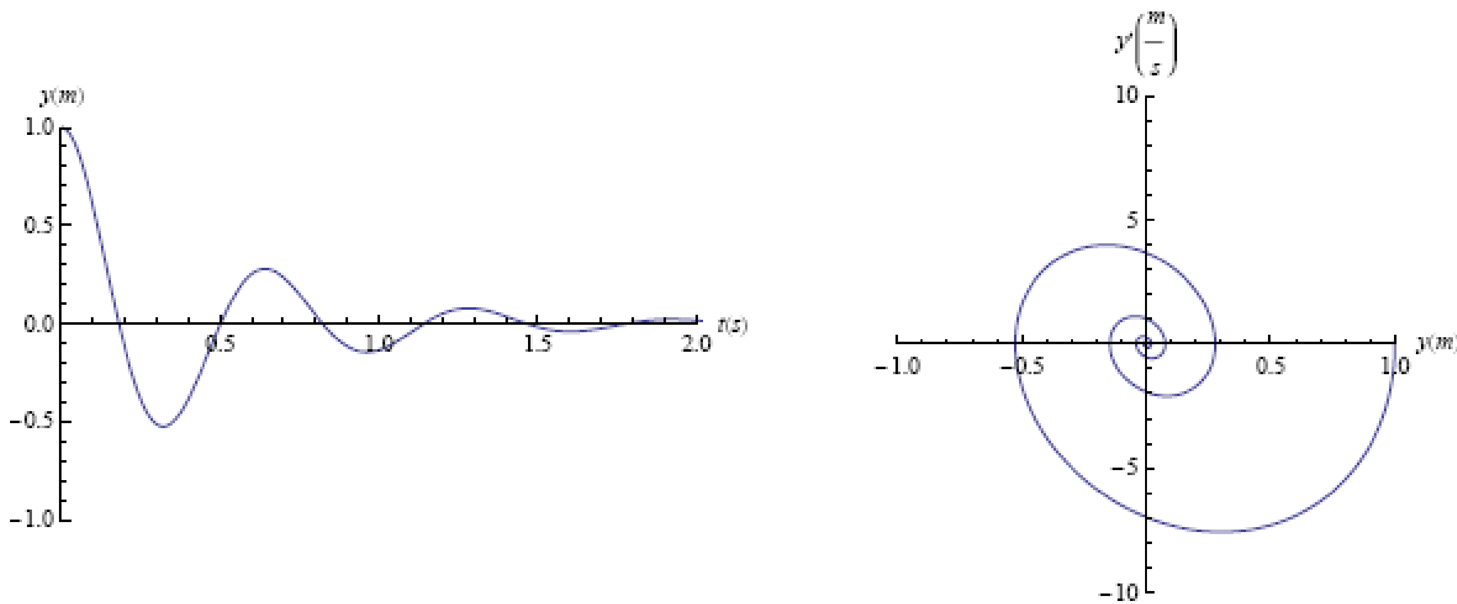
In[186]:=
```
w = 10;
eqn1 = y''[t] + 2 * delta * y'[t] + w^2 y[t] == 0;
eqn2 = y[0] == 1;
eqn3 = y'[0] == 0;
```

In[190]:=
```
sol = DSolve[{eqn1, eqn2, eqn3}, y, t]
```

Out[190]= $\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{t\}, \frac{1}{12} e^{-2t} \left(12 \,\text{Cos}\left[4\sqrt{6}\, t\right] + \sqrt{6}\, \text{Sin}\left[4\sqrt{6}\, t\right]\right)\right]\right\}\right\}$

In[191]:=
```
GraphicsArray[{Plot[{y[t]} /. sol, {t, 0, 3},
    PlotRange → {{0, 2}, {-1, 1}}, AxesLabel → {t[s], y[m]}],
  ParametricPlot[{y[t] /. sol, y'[t]} /. sol, {t, 0, 3}, PlotRange →
    {{-1, 1}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1, AxesLabel → {y[m], y'[m / s]}]}]
```

Out[191]=



Stabilita a pevné body

Pevný bod je specifickým bodem dynamického systému, který se v čase nemění. Říká se mu také rovnovážný či singulární bod systému.

Je-li systém definován rovnicí dx/dt = f(x), potom můžeme jeho pevný bod $x^{\sim}$ nalézt pomocí podmínky $f(x^{\sim})=0$. Není přitom ani nutné znát analytické řešení x(t).

Pro diskrétní systémy podmínka nabývá tvaru $x^{\sim} = f(x^{\sim})$

Stabilní pevný bod: systém konverguje k pevnému bodu $x^{\sim}$ pro $t \to \infty$ pro všechny počáteční hodnoty x_0 blízké $x^{\sim}$.

Neutrálně stabilní pevný bod: pro všechny počáteční hodnoty x_0 blízké $x^{\sim}$ systém zůstává v blízkosti pevného bodu $x^{\sim}$, ale nekonverguje k němu.

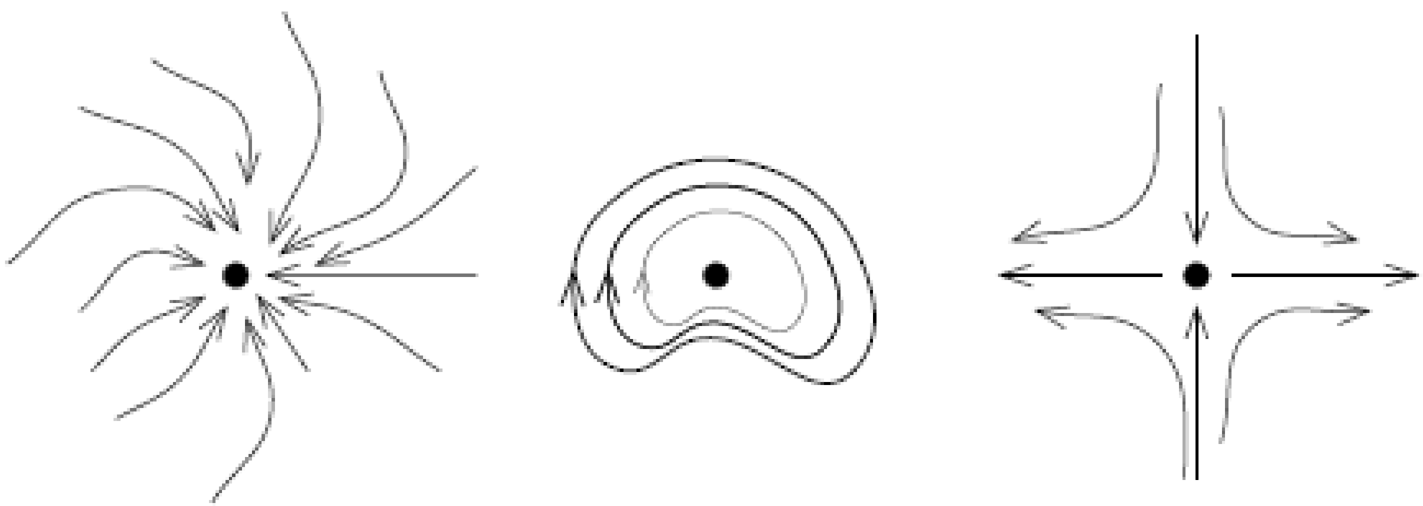
Nestabilní pevný bod: pro všechny počáteční hodnoty x_0 blízké $x^{\sim}$ systém diverguje k hodnotám vzdáleným od $x^{\sim}$

Atraktor je stav, do kterého systém směřuje. Je to množina, ve které je stavový vektor v nekonečném čase. Atraktorem mohou být pevné body, periodické body, křivky nebo i velmi komplikované struktury.

Perturbace je malá změna dynamického systému s charakterem poruchy, která vychýlí systém z rovnovážného stavu.

Fázové portréty tří základních typů pevných bodů

STABILNÍ NEUTRÁLNĚ STABILNÍ NESTABILNÍ



Příklad 1– baktérie ve sklenici

Sklenice je naplněna živným roztokem a bakteriemi. Relativní rychlost reprodukce bakterií označíme jako b a relativní rychlost, s jakou baktérie hynou, označíme p. Potom bude jejich populace růst rychlostí $r = b - p$.

Je-li ve sklenici x baktérií, potom rychlost, s jakou se mění jejich počet, bude odpovídat $(b - p)x$, z čehož plyne, $dx/dt = rx$. Řešením této rovnice pro $x(0)=x_0$ je

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

Tento model však není realistický, protože populace baktérií by pro kladné r rostla do nekonečna. Ve skutečnosti společně s růstem počtu baktérií roste také množství toxických zplodin jimi produkovaných, navzájem si překážejí atd. Namísto konstantní relativní rychlosti úhynu p budeme předpokládat tuto rychlost závislou na počtu baktérií px. Nyní počet baktérií roste podle bx a klesá podle px^2.

Nová diferenciální rovnice bude

$$\frac{dx}{dt} = bx - px^2$$

Diferenciální rovnice,

$$\frac{dx}{dt} = bx - px^2$$

Počáteční počet baktérií $x(0)=x_0$

Analytické řešení programu Mathematica

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{b\, e^{b\,t}\, x0}{b - p\, x0 + e^{b\,t}\, p\, x0}\right\}\right\}$$

Pro nalezení pevných bodů musíme položit pravou stranu rovnice rovnou nule.

$$b\tilde{x} - p\tilde{x}^2 = 0$$

$$\tilde{x}(b - p\tilde{x}) = 0$$

Vycházejí dvě možná řešení,

tzn. máme dva pevné body:

$$\tilde{x}_1 = 0$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{b}{p}$$

První pevný bod $x^{\sim}_1 = 0$;

Nejsou žádné baktérie, tudíž žádné nové nemohou vznikat a žádné nemohou uhynout. Stačí však nepatrná kontaminace sklenice baktériemi (perturbace), avšak menší než b/p, a vidíme, že počet baktérií roste podle $dx/dt = bx-px^2>0$ a nikdy se nevrátí do výchozího nulového stavu.
Závěr: tento pevný bod je nestabilní.

Druhý pevný bod $x^{\sim}_2 = b/p$;

Na této úrovni populace baktérie vznikají rychlostí $bx^{\sim}=b(b/p) = b^2/p$ a hynou rychlostí $px^{\sim 2} = p(b/p)^2 = b^2/p$, takže obě tyto rychlosti jsou v rovnováze.

Pokud počet baktérií mírně vzroste, potom $dx/dt = bx-px^2<0$ a vše se vrátí do rovnovážného stavu.

Pokud počet baktérií mírně klesne, potom $dx/dt = bx-px^2>0$ a vše se opět vrátí do rovnovážného stavu.

Malé perturbace z bodu $x^{\sim} = b/p$ budou korigovány zpět do b/p.

Závěr: tento pevný bod je stabilní a je zároveň atraktorem tohoto systému.

Grafické řešení v programu Mathematica

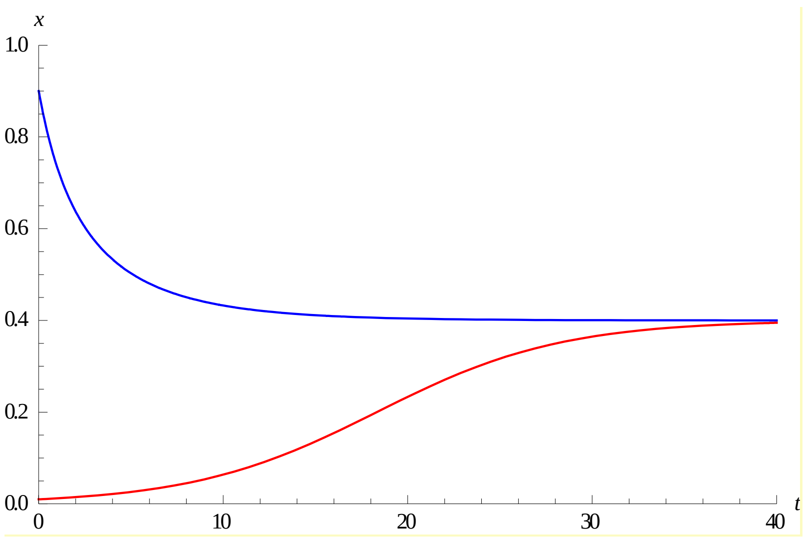
Vstupní parametry: $b=0.2$, $p=0.5$

Počáteční podmínky: $x_0 = 0.9$ pro modré čáry

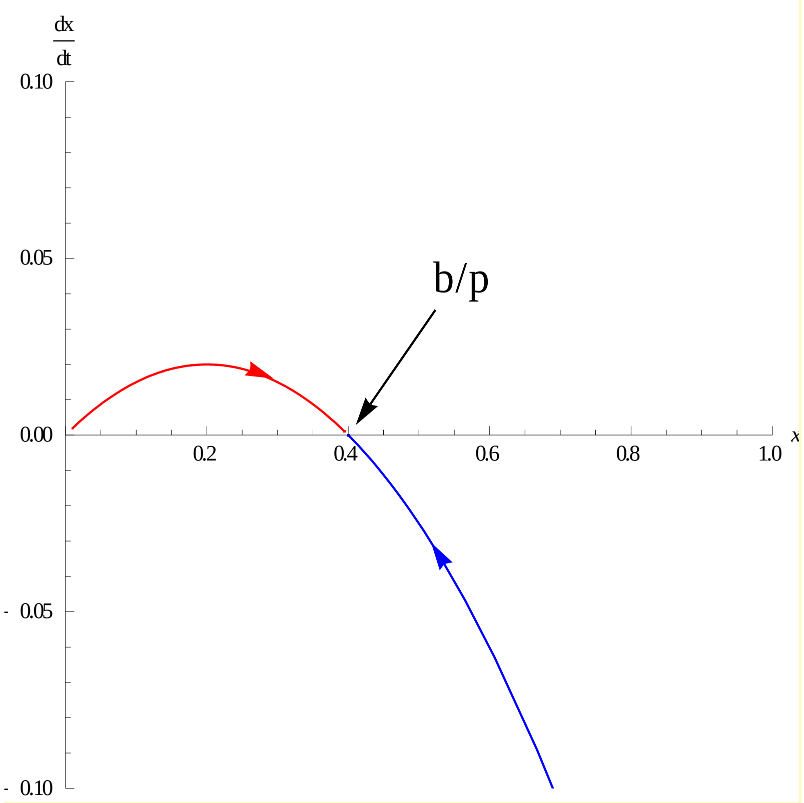
$x_0 = 0.01$ pro červené čáry

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{b\, e^{b\,t}\, x0}{b - p\, x0 + e^{b\,t}\, p\, x0}\right\}\right\}$$

Počet baktérií v čase



Fázový portrét



Příklad 2 – predátor a kořist

Mějme biologický systém se dvěma živočišnými druhy – predátory (vlky) a kořistí (králíky).

Populace králíků v čase nechť je $r(t)$ a populace vlků v čase $w(t)$.

Králíci se bez přítomnosti vlků budou množit rychlostí $dr/dt = ar$, kde $a>0$

Vlci bez králíků-potravy budou hynout rychlostí $dw/dt = -bw$, kde $b>0$

Dáme-li oba druhy dohromady, budou vlci lovit a jíst králíky. Úbytek populace králíků bude potom dán aktuálním počtem vlků w, počtem králíků r a konstantou g, která představuje agresivitu predátorů. Přírůstek populace vlků bude dán také počtem králíků a vlků r a w, a kromě toho konstantou h, která představuje efektivitu přeměny králičího masa na biomasu predátorů – vlků.

Systém je popsán dvěma diferenciálními rovnicemi.

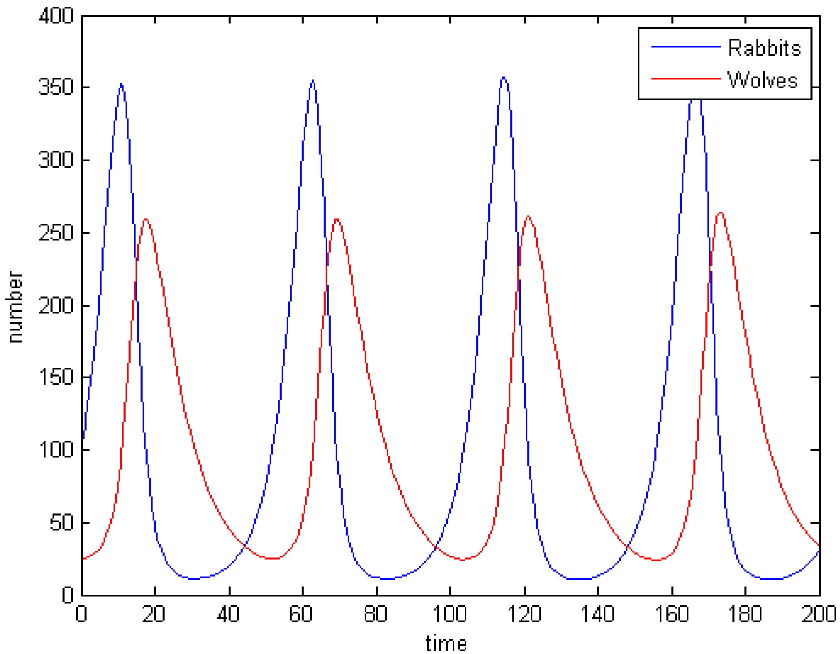
$$\frac{dr}{dt} = ar - grw$$

$$\frac{dw}{dt} = -bw + hrw$$

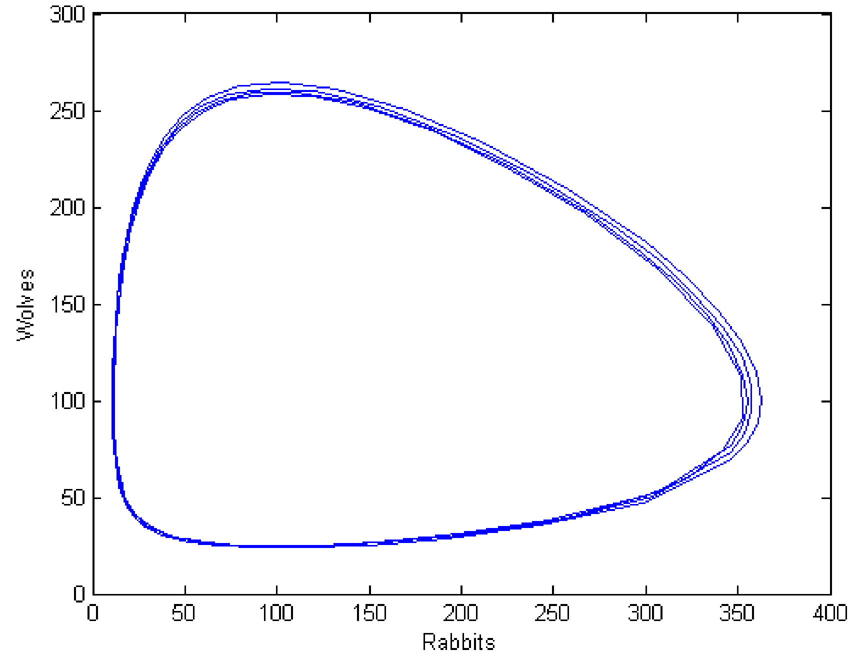
Zde je časová závislost počtu obou druhů a fázový portrét

$a=0.2$; $b=0.1$; $g=0.002$; $h=0.001$, počáteční počet králíků $r_0=100$, vlků $w_0=25$

Počty druhů v závislosti na čase



Fázový portrét

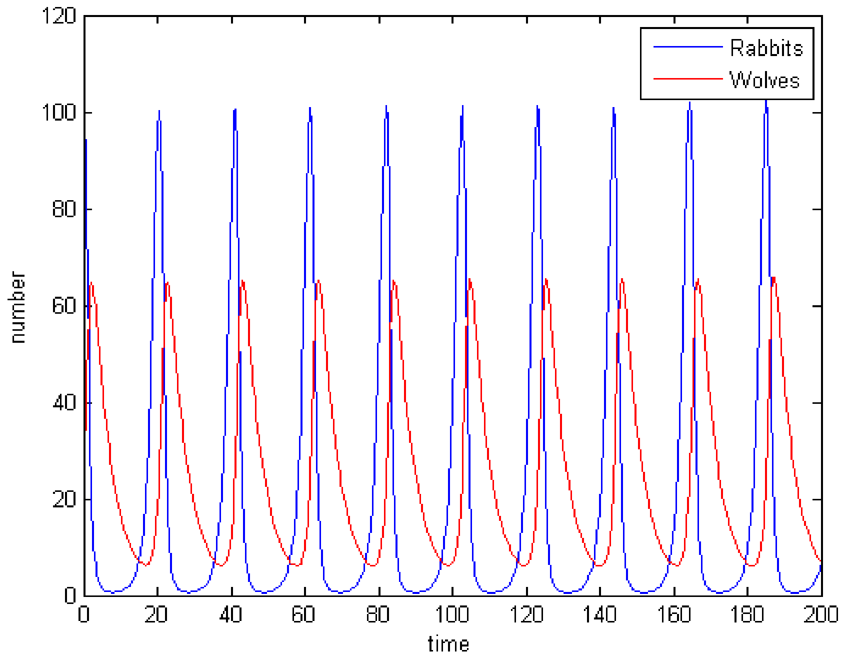


Atraktorem tohoto systému je ve fázovém portrétu viditelný limitní cyklus.

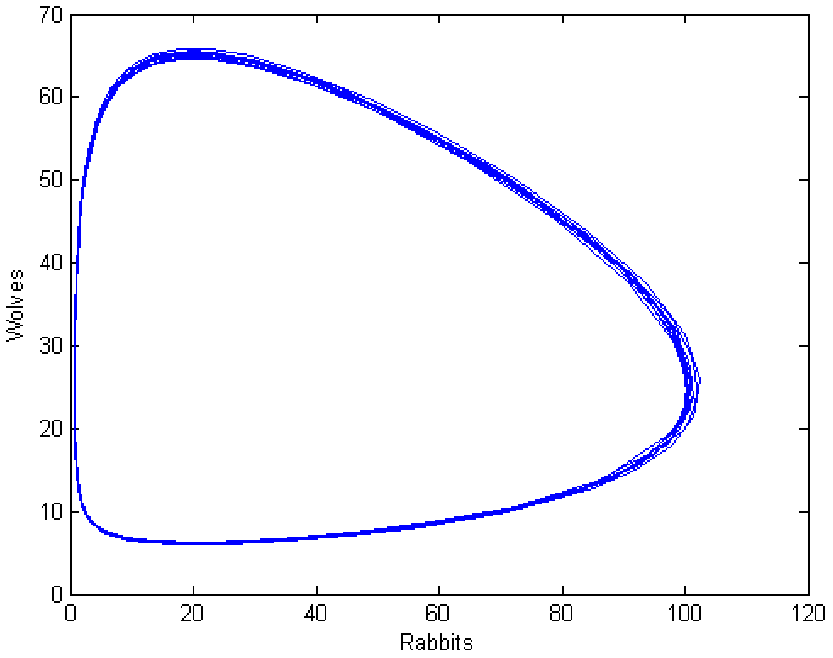
Pro vyšší králičí porodnost, rychlejší vlčí úmrtnost a vyšší agresivitu dostáváme rychlejší změny

a=0.75; b=0.2; g=0.03; h=0.01

Počty druhů v závislosti na čase



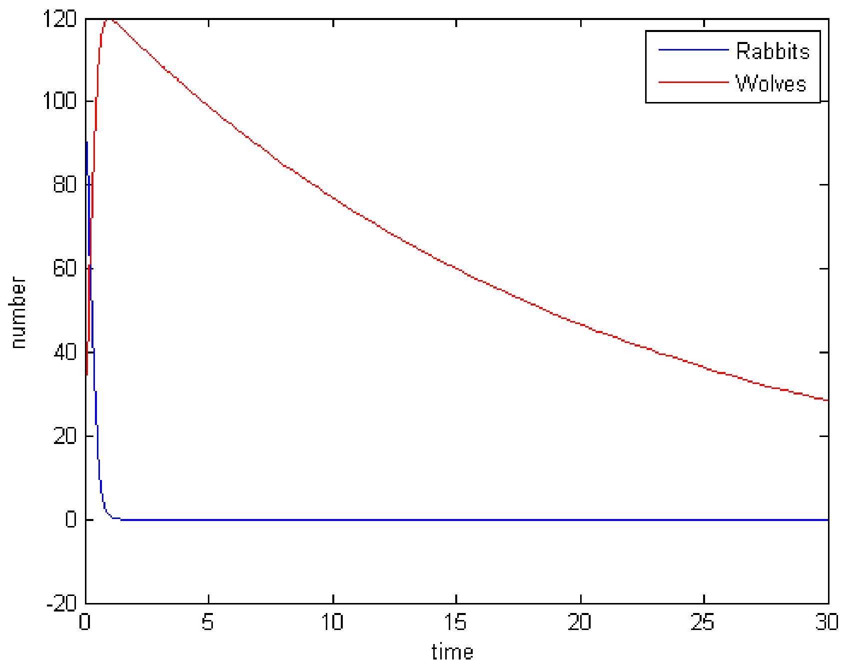
Fázový portrét



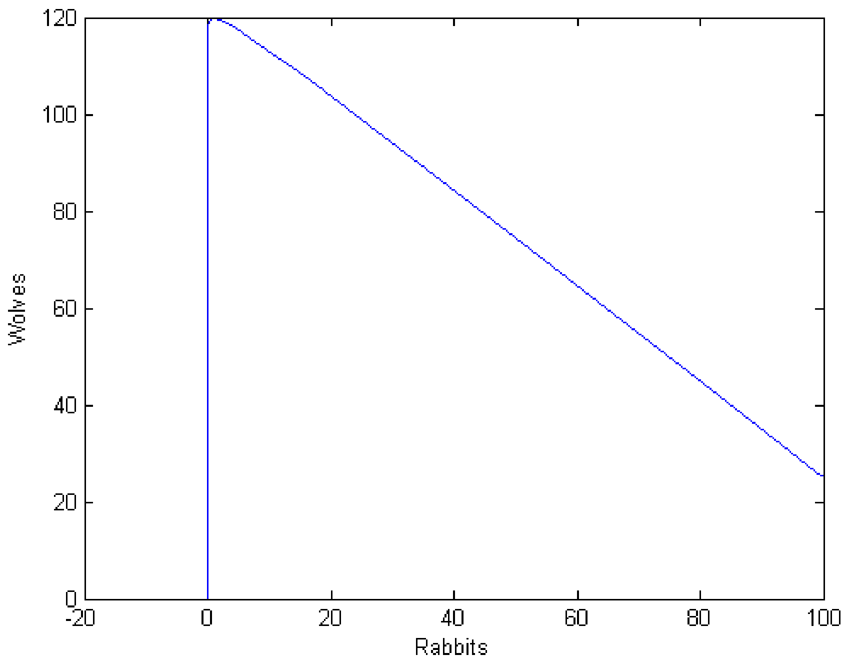
Bude-li velmi nízká králičí porodnost a vlčí úmrtnost, a zároveň bude vysoká agresivita vlků, obě populace zaniknou

a=0.01; b=0.05; g=0.05; h=0.05

Počty druhů v závislosti na čase



Fázový portrét



Výpočet systému predátor/kořist v programu Mathematica

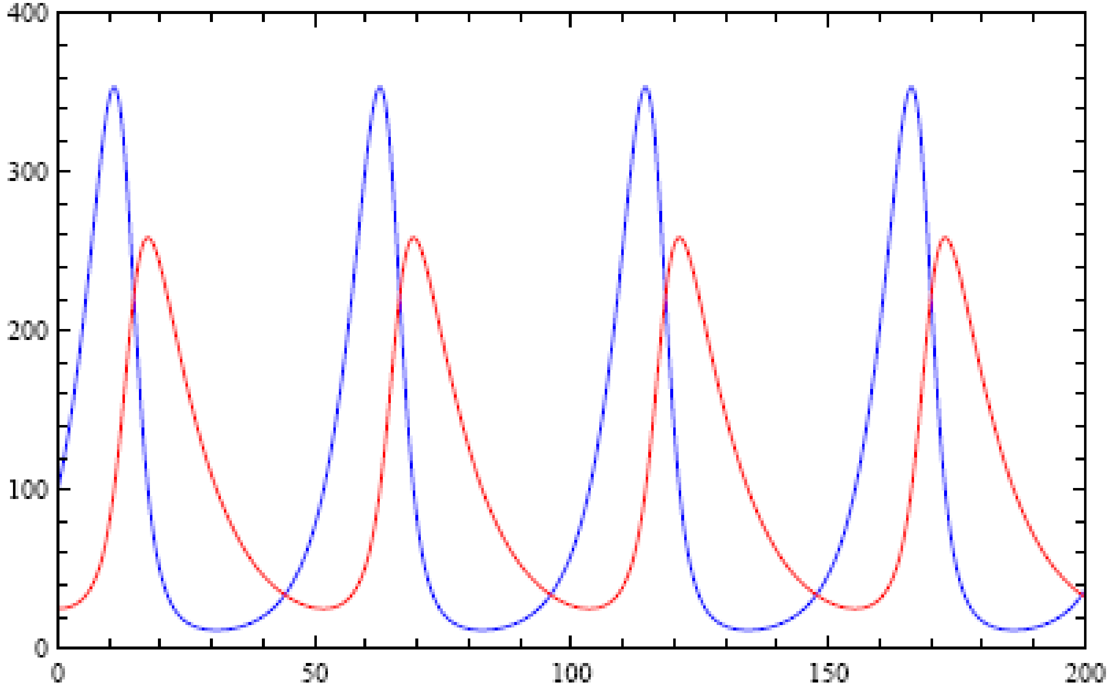
```
In[167]:= a = 0.2; b = 0.1; g = 0.002; h = 0.001;

In[168]:= eqn1 = r'[t] - a * r[t] + g * r[t] * w[t] == 0;
          eqn2 = w'[t] + b * w[t] - h * r[t] * w[t] == 0;
          eqn3 = r[0] == 100;
          eqn4 = w[0] == 25;

In[172]:= sol = NDSolve[{eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}, {r, w}, {t, 0, 200}];

In[173]:= Plot[{r[t] /. sol, w[t] /. sol}, {t, 0, 200},
           PlotRange → {{0, 200}, {0, 400}}, PlotStyle → {Blue, Red}, Frame → True]
```

Out[173]=



Zobrazení fázového portrétu predátor/kořist v programu Mathematica

```
ParametricPlot[Evaluate[{r[t], w[t]} /. sol],
 {t, 0, 200}, PlotRange → {{0, 400}, {0, 300}},
 PlotStyle → {Blue}, Frame → True, FrameLabel → {kralici, vlci}]
```