Příklad 1

Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně 360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé 1,8 km ?

Řešení:

Pro rychlost v_1 rovnoměrně zrychleného pohybu letadla v čase t_1 (s nulovou počáteční rychlostí) platí

$$v_1 = at_1, \tag{1}$$

odtud snadno vyjádříme čas t_1 jako

$$t_1 = \frac{v_1}{a}. \tag{2}$$

Za čas t_1 letadlo urazí dráhu, která odpovídá délce rozjezdové dráhy x_1

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{a}. \tag{3}$$

Z tohoto vztahu vyjádříme zrychlení a jako

$$a = \frac{v_1^2}{2x_1} = \frac{[360\ (1000\ \mathrm{m})/(3600\ \mathrm{s})]^2}{2\ .\ 1,8\ .\ 1000\ \mathrm{m}} \doteq \underline{\underline{2,78\ \mathrm{m.s^{-2}}}}. \tag{4}$$

Zrychlení rovněž můžeme vyjádřit pomocí násobku tíhového zrychlení $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$

$$a = 2,78\ \mathrm{m.s^{-2}}\ \frac{g}{9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}} \doteq \underline{\underline{0,28\ \mathrm{g}}}. \tag{5}$$

Příklad 2
Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.
V čase 0,200 s se nachází ve výšce 0,544 m.
a) jaká je jeho počáteční rychlost ?
b) jaká je jeho rychlost v zadané výšce ?
c) jak vysoko ještě vyletí ?

Řešení:
Příklad řešíme pro těžiště pásovce
a) určení počáteční rychlosti v_0

$$y_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{1}{2}\frac{g}{t_1} \tag{1}$$

číselně

$$v_0 = \frac{0,544 \text{ m}}{0,200 \text{ s}} + \frac{1}{2}\, 9,81 \text{ m.s}^{-2} \,.\, 0,200 \text{ s} = \underline{\underline{3,701 \text{ m.s}^{-1}}} \tag{2}$$

b) určení rychlosti v_1 ve výšce y_1
rychlost ve výšce y_1 nastane v zadaném čase t_1, takže

$$v_1 = v_0 - g t_1 = 3,701 \text{ m.s}^{-1} - 9,81 \text{ m.s}^{-2} \,.\, 0,200 \text{ s} = \underline{\underline{1,739 \text{ m.s}^{-1}}} \tag{3}$$

c) určení, o jakou výšku Δy ještě vyplašený pásovec nastoupá
pásovec přestane stoupat v čase t_d, kdy jeho rychlost bude nulová. Platí tedy

$$0 = v_0 - g t_d \Rightarrow t_d = \frac{v_0}{g} \tag{4}$$

pásovec tedy vystoupá v čase t_d do maximální výšky y_d, která je dána jako

$$y_d = v_0 t_d - \frac{1}{2} g t_d^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{(3,701 \text{ m.s}^{-1})^2}{9,81 \text{ m.s}^{-2}} = 0,698 \text{ m} \tag{5}$$

pásovec tedy nastoupá ještě o

$$\Delta y = y_d - y_1 = 0,698 \text{ m} - 0,544 \text{ m} = \underline{\underline{0,154 \text{ m}}} \tag{6}$$

Příklad 3

Jaká je perioda otáčení pouťové centrifugy o poloměru 5 m, jestliže v horní poloze působí na veselého cestujícího výsledné zrychlení a=g směrem nahoru ? Tíhové zrychlení g=10 m.s^{-2}.

Řešení:

síla tíhová

$$G = mg \tag{1}$$

síla odstředivá

$$F_O = \frac{mv^2}{r} \tag{2}$$

rozdíl sil je roven

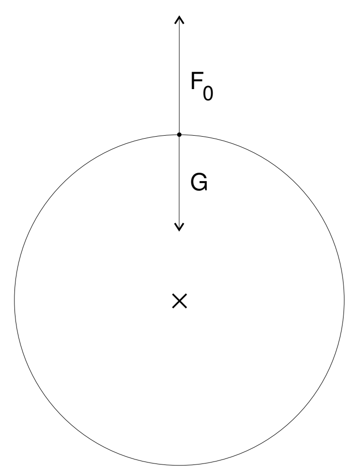
$$F_O - G = mg \Rightarrow \frac{mv^2}{r} - mg = mg \Rightarrow \frac{v^2}{r} = 2g \Rightarrow v = \sqrt{2gr} \tag{3}$$

Pro periodu pohybu platí

$$T = \frac{l}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{2gr}} = \pi\sqrt{\frac{2r}{g}} \tag{4}$$

číselně[1]

$$T = \pi\sqrt{\frac{2.5\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m.s^{-2}}}} = \pi\ \mathrm{s} \doteq \underline{\underline{3,14\ \mathrm{s}}} \tag{5}$$

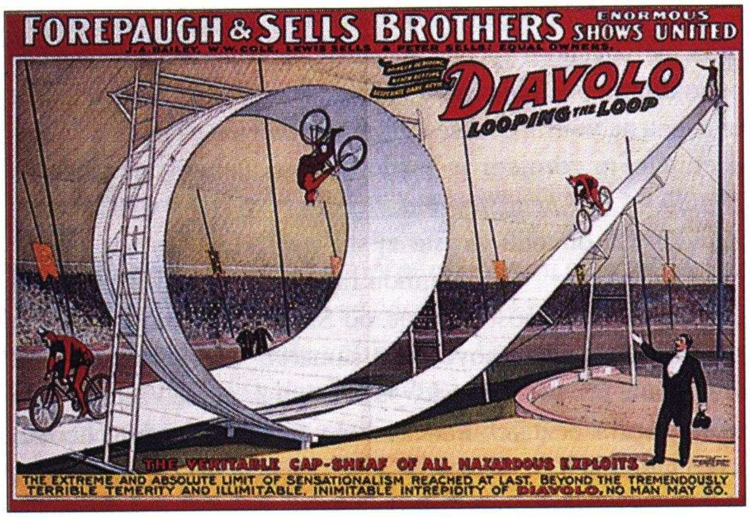


Obrázek 1: Síly působící na cestujícího na centrifuze.

[1]skutečná centrifuga na pouti se točí rychleji, s dobou oběhu kolem 2 s

Příklad 4

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo "Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (viz. obr). Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr R=2,7 m. Jakou nejmenší rychlostí mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?



Řešení:

V horním bodě dráhy působí na akrobata tíhová síla G a stejně orientovaná síla reakce podložky N. Součet těchto sil je roven dostředivé síle F_d

$$G + N = F_d \Rightarrow mg + N = \frac{mv^2}{R}. \tag{1}$$

V okamžiku ztráty kontaktu kola se smyčkou je $N = 0$ a platí

$$mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR}. \tag{2}$$

číselně

$$v = \sqrt{9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}\ .\ 2,7\ \mathrm{m}} \doteq \underline{\underline{5,15\ \mathrm{m.s^{-1}}}} \tag{3}$$

Příklad 5

Železniční vagón se pohybuje po vodorovné přímé trati. Brzdíme jej silou, která se rovná jedné desetině jeho tíhy. Vypočítejte čas měřený od začátku brždění za který se vagón zastaví a dráhu, kterou urazí od začátku brždění do zastavení. V okamžiku začátku brždění má vagón rychlost 72 km.h^{-1}

Řešení:

Rychlost vagónu, který se pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem, je

$$v(t) = v_0 - at, \tag{1}$$

kde $v(t)$ je rychlost v čase t, a je zrychlení a v_0 je počáteční rychlost. Zrychlení a nyní vyjádříme pomocí známé brzdící síly F, pro kterou platí

$$F = \frac{mg}{10} = ma, \tag{2}$$

kde m je hmotnost vagónu a g tíhové zrychlení. Zrychlení a vyjádříme jako

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg}{10m} = \frac{g}{10}. \tag{3}$$

Zrychlení (3) nyní dosadíme do rovnice (1). Po malé úpravě dostáváme pro čas, ve kterém se vagón zastaví (tj. $v = 0$), rovnici

$$t = \frac{10(v_0 - v)}{g} = \frac{10v_0}{g} = \frac{10\dfrac{72}{3,6}\ \mathrm{m.s^{-1}}}{10\ \mathrm{m.s^{-2}}} = \underline{\underline{20\ \mathrm{s}}} \tag{4}$$

Dráhu, kterou vagón urazil, vypočteme ze známého vztahu pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu, ve kterém vyjádříme zrychlení pomocí (3) a čas pomocí vztahu (4). Pak dostaneme

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = v_0\frac{10v_0}{g} - \frac{1}{2}\frac{g}{10}\left(\frac{10v_0}{g}\right)^2 = \frac{5v_0^2}{g} \tag{5}$$

číselně pak pro dráhu máme

$$s = \frac{5\left(\dfrac{72}{3,6}\right)^2 \mathrm{m^2.s^{-2}}}{10\ \mathrm{m.s^{-2}}} = \underline{\underline{200\ \mathrm{m}}} \tag{6}$$

Příklad 6

Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_I=421800 km s periodou T_I=1,769 dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_M=2,55.10^{-3} AU s periodou T_M=27,322 dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země. Astronomická jednotka 1 AU je rovna 149,598.10^6 km.

Řešení:

Použijeme 3. Keplerův zákon pro Měsíc a Io

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M_Z}, \quad \frac{T_I^2}{a_I^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M_J}. \tag{1}$$

Obě rovnice vydělíme a máme

$$\frac{\frac{4\pi^2}{\varkappa M_Z}}{\frac{4\pi^2}{\varkappa M_J}} = \frac{\frac{T_M^2}{a_M^3}}{\frac{T_I^2}{a_I^3}}, \tag{2}$$

pro poměr hmotností Jupitera a Země dostáváme

$$\frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2 \ a_I^3}{T_I^2 \ a_M^3}. \tag{3}$$

číselně

$$\frac{M_J}{M_Z} = \frac{27,322^2 \ . \ (421800 \text{ km})^3}{(2.55.10^{-3} \ . \ 149,598.10^6 \text{ km})^3 \ 1,769^2} \doteq \underline{\underline{315}} \tag{4}$$

Příklad 7

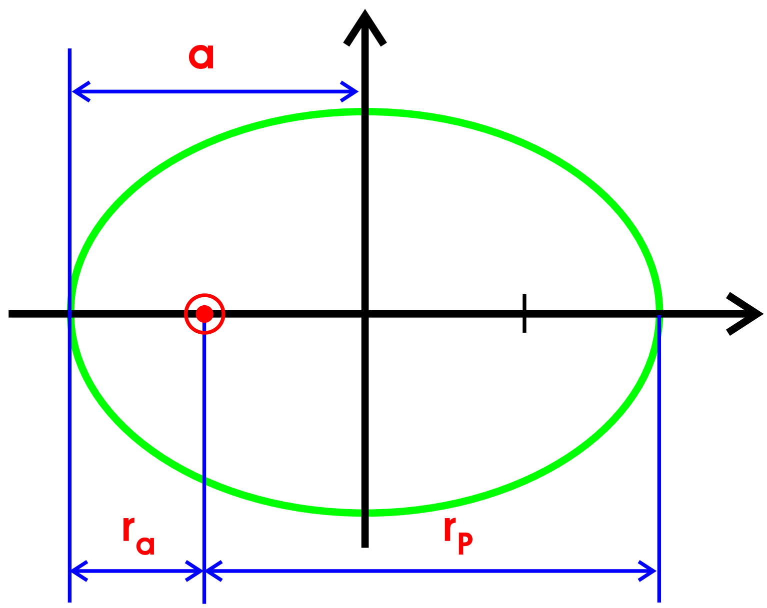
Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od r_{MP}=363300 km v perigeu do r_{MA}=405500 km v apogeu, perioda oběhu Měsíce kolem Země je T_M=27,322 dne. Umělá družice se pohybuje po eliptické dráze nad rovníkem tak, že v perigeu je ρ_{DP}=225 km nad povrchem Země a v apogeu je ρ_{DA}=710 km. Rovníkový poloměr Země je R_Z=6378 km. Určete periodu oběhu umělé družice T_D.

Řešení:

Ze 3. Keplerova zákona:

$$\frac{T_D^2}{T_M^2} = \frac{a_D^3}{a_M^3} \Rightarrow T_D = T_M\sqrt{\frac{a_D^3}{a_M^3}}, \tag{1}$$

z obrázku vidíme, že



Obrázek 2: Schematické znázornění dráhy družice.

$$2a = r_a + r_p. \tag{2}$$

Pro družici je třeba přepočítat $r_{a,p}$ a $\rho_{a,p}$

$$2a_D = \rho_{DA} + R_Z + \rho_{DP} + R_Z = \rho_{DA} + \rho_{DP} + 2R_Z. \tag{3}$$

Nyní dosadíme (2) a (3) do (1) a dostaneme

$$T_D = T_M\sqrt{\left(\frac{\rho_{DA} + \rho_{DP} + D_Z}{r_{MA} + r_{MP}}\right)^3} = 27,322 \text{ dne} \sqrt{\left(\frac{225 + 710 + 2.6378}{363300 + 405500}\right)^3} \doteq$$

$$\doteq 27,322 \ . \ 2,377.10^{-3} \text{ dne} \doteq 0,0649 \text{ dne} \doteq \underline{\underline{1{,}56 \text{ h} = 1 \text{ h } 34 \text{ min}}} \tag{4}$$

Příklad 8

Rotor elektromotoru s hmotností 110 kg má moment setrvačnosti 2 kg.m^2 a koná 20 otáček za sekundu. Jak velkou má kinetickou energii?

Řešení:

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} J(2\pi f)^2 \tag{1}$$

číselně

$$W_k = \frac{1}{2} 2 \text{ kg.m}^2 \ . \ (2\pi .20 \text{ s}^{-1})^2 = \underline{\underline{15791 \text{ J}}} \doteq \underline{\underline{15,8 \text{ kJ}}} \tag{2}$$

rozměrová kontrola:
J=N.m=kg.m.s^{-2}.m=kg.m^2.s^{-2}

Příklad 9

Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak hmotnosti 300 t, pohybující se po vodorovné trati, zvětšil svou rychlost z 36 km.h^{-1} na 54 km.h^{-1} ? Neuvažujeme ztráty třením a vliv odporu vzduchu.

Řešení:

Pro práci platí

$$A = \int_1^2 \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.\vec{v}\mathrm{d}t = \int_1^2 \mathrm{d}(m\vec{v}).\vec{v} = m\ \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{d}(v^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1. \quad (1)$$

Práce je tedy dána rozdílem kinetických energií

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{300\ .\ 1000\ \mathrm{kg}}{2}\left[\left(\frac{54}{3,6}\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2 - \left(\frac{36}{3,6}\ \mathrm{m.s^{-1}}\right)^2\right] = \underline{\underline{18,75\ \mathrm{MJ}}} \quad (2)$$

Příklad 10

Dvě velmi malé kuličky, z nichž každá má hmotnost 3.10^{-6} kg, jsou ve vakuu zavěšeny na velmi tenkých vláknech 0,05 m dlouhých a visících ze společného bodu. Oběma kuličkám byl udělen stejně velký záporný náboj. Kuličky se odpuzují tak, že vlákna na nichž visí, jsou odchýlena od svislého směru o 30°. Najděte velikost nábojů. Celá soustava je umístěna v gravitačním poli. Gravitační zrychlení je g=10 m.s^{-2}, permitivita prostředí je ε=8,85.10^{-12} F.m^{-1}.

Řešení:

Na kuličku působí elektrostatická (Coulombova) síla $\vec{F}_e$, gravitační síla $\vec{G}$ a tahová síla vlákna $\vec{T}$. Je-li kulička v rovnováze, je jejich součet roven nule.

$$\vec{F}_e + \vec{G} + \vec{T} = \vec{0}, \tag{1}$$

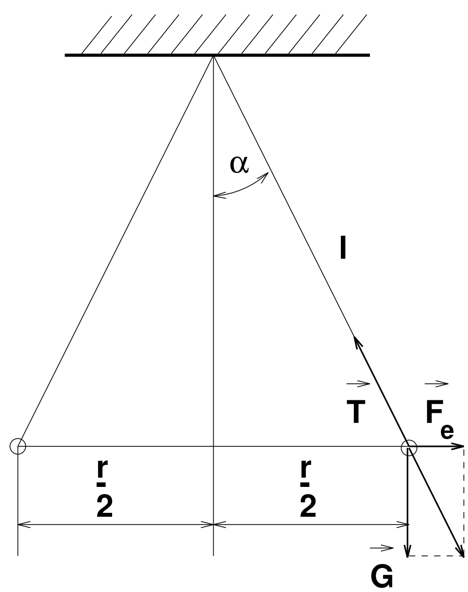
kde

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{r^3}\vec{r} \tag{2}$$

a

$$\vec{F}_g = m\vec{g}. \tag{3}$$

Protože pak se výslednice síly gravitační a elektrostatické rovná síle tahové, platí (viz obrázek)



Obrázek 3: Schematické znázornění kuliček zavěšených na tenkých vláknech.

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{G} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon mgr^2}. \tag{4}$$

Z obrázku rovněž vidíme, že r lze vyjádřit z geometrie soustavy

$$\sin\alpha = \frac{r}{2l} \Rightarrow r = 2l\sin\alpha. \tag{5}$$

Nyní dosadíme r do předchozí rovnice a máme

$$\tan\alpha = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon mgl^2\sin^2\alpha} \Rightarrow q = 4l\sin\alpha\sqrt{\pi\varepsilon mg\tan\alpha}. \tag{6}$$

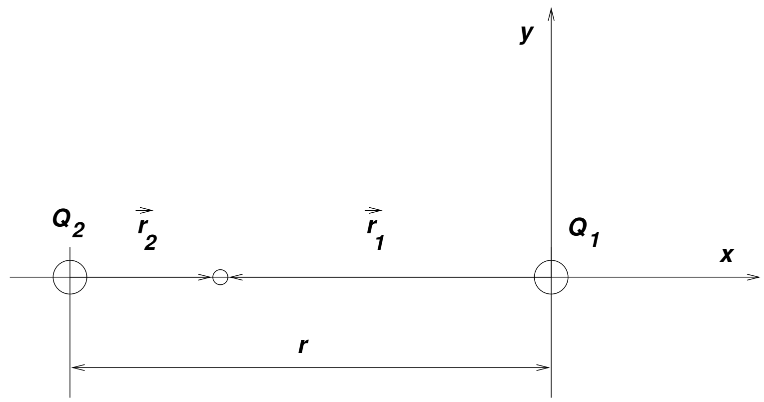
numericky
$$q = 4.0,05.\sin 30^\circ \sqrt{\pi.8,85.10^{-12}.3.10^{-6}.10.\tan 30^\circ} = \underline{\underline{2,2.10^{-9}\ \mathrm{C}}}. \tag{7}$$
rozměrová kontrola
$$\begin{aligned}\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{F.m^{-1}.kg.m.s^{-2}}} = \sqrt{\mathrm{m^2\frac{C}{V}.kg.s^{-2}}} = \sqrt{\mathrm{m^2}\frac{\mathrm{C^2}}{J}\mathrm{.kg.s^{-2}}} = \\ = \sqrt{\mathrm{m^2\frac{C^2}{N.m}.kg.s^{-2}}} = \sqrt{\mathrm{m\frac{C^2}{kg.m.s^{-2}}.kg.s^{-2}}} = \sqrt{\mathrm{C^2}} = \mathrm{C}\end{aligned} \tag{8}$$

Příklad 11

Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě, který leží uprostřed mezi dvěma náboji Q_1=+50 nC a Q_2=+70 nC, které jsou od sebe vzdálené $r = 20$ cm. Náboje jsou ve vakuu, permitivita vakua je rovna $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Řešení:

Protože náboj Q_2 má větší hodnotu než Q_1, bude směr intenzity elektrického pole shodný se směrem



Obrázek 4: Schematické znázornění obou nábojů.

osy x. Intenzita elektrického pole E je definována jako

$$E = \frac{F_e}{q}. \tag{1}$$

Intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového náboje Q umístěného ve vakuu určíme tak, že sílu F_e vyjádříme pomocí Coulombova zákona a dosadíme do této definice:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{2}$$

Velikost pole v místě uprostřed mezi náboji pak bude

$$E = E_2 - E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2}\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2 - Q_1}{r^2}\right). \tag{3}$$

Numericky dostaneme

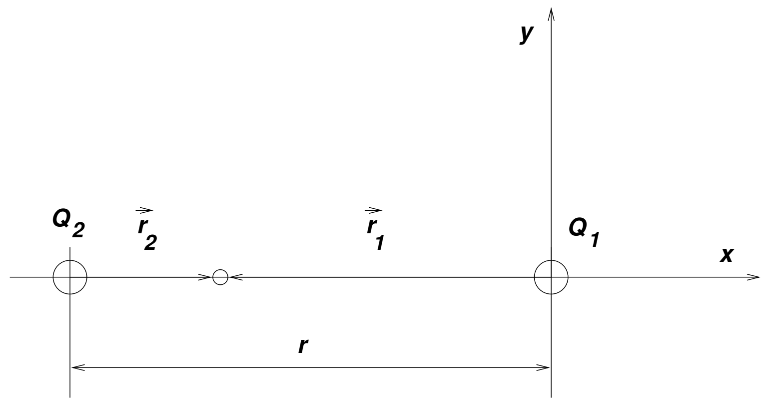
$$E = \frac{1}{\pi\, 8,854.10^{-12}}\left(\frac{70.10^{-9} - 50.10^{-9}}{0,2^2}\right) = \underline{\underline{17,97.10^3 \text{ V.m}^{-1}}} \tag{4}$$

Příklad 12

Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě, který leží uprostřed mezi dvěma náboji Q_1=+50 nC a Q_2=+70 nC, které jsou od sebe vzdálené $r = 20$ cm. Náboje jsou v petroleji, permitvita petroleje je rovna $\varepsilon_p = 2\varepsilon_0$, permitivita vakua je rovna $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Řešení:

Protože náboj Q_2 má větší hodnotu než Q_1, bude směr intenzity elektrického pole shodný se směrem



Obrázek 5: Schematické znázornění obou nábojů.

osy x. Intenzita elektrického pole E je definována jako

$$E = \frac{F_e}{q}. \tag{1}$$

Intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od bodového náboje Q umístěného v petroleji určíme tak, že sílu F_e vyjádříme pomocí Coulombova zákona a dosadíme do této definice:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_p}\frac{Qq}{r^2} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_p r^2}. \tag{2}$$

Velikost pole v místě uprostřed mezi náboji pak bude

$$E = E_2 - E_1 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2 - Q_1}{r^2}\right). \tag{3}$$

Numericky dostaneme

$$E = \frac{1}{2\pi\ 8,854.10^{-12}}\left(\frac{70.10^{-9} - 50.10^{-9}}{0,2^2}\right) = \underline{\underline{8,983.10^3 \text{ V.m}^{-1}}} \tag{4}$$

Příklad 13

Vypočtěte intenzitu elektrického pole kolem nekonečně dlouhé rovnoměrně nabité niti ve vzdálenosti a=5 cm od niti. Délková hustota náboje ξ =0,01 μC/m. K řešení využijte Gaussův zákon elektrostatiky.

Řešení:

Gaussův zákon elektrostatiky:

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Jako integrační plochu zvolíme povrch válce. Rotační plochu označíme S, podstavy S_1 a S_2 (viz obrázek). Víme, že elektrická intenzita bude mít směr kolmý k niti. K toku povrchem válce pak přispívá pouze rotační plocha válce S, tok přes podstavy válce S_1, S_2 je nulový, protože na nich $\vec{E} \perp \vec{S}$. Platí tedy

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon}, \tag{2}$$

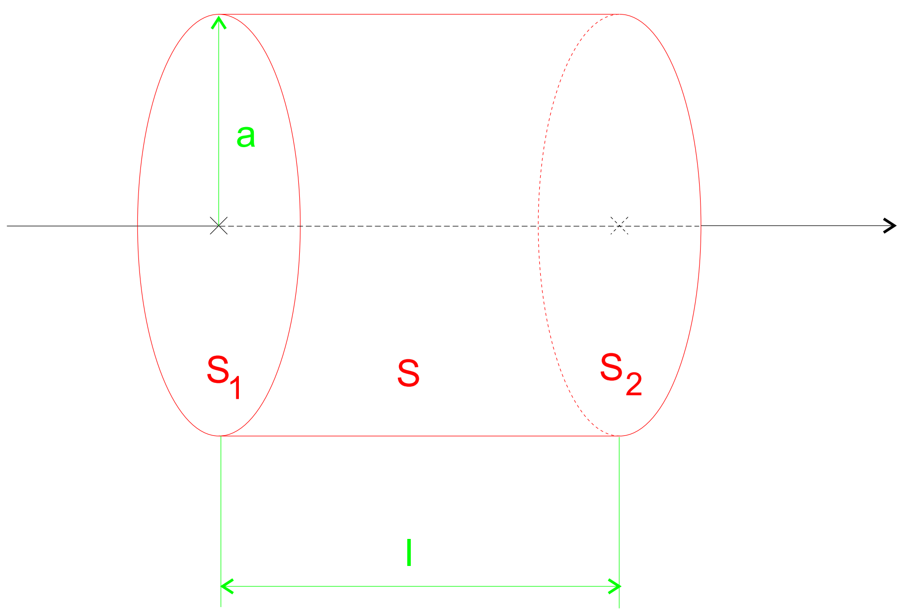
$$E2\pi al = \frac{\xi l}{\varepsilon}, \tag{3}$$

tj.

$$E = \frac{\xi l}{\varepsilon}\frac{1}{2\pi a}. \tag{4}$$

číselně

$$E = \frac{0,01.10^{-6}\ \mathrm{C}}{2\pi\ 0,05\ \mathrm{m}\ 8,854.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}} = \underline{\underline{3595,1\ \mathrm{V.m^{-1}}}} \tag{5}$$



Obrázek 6: Schematické znázornění integrační plochy.

Příklad 14

Vypočítejte indukci magnetického pole buzeného dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe $a = 10$ cm, kterými teče proud $I = 2$ A stejným směrem, ve vzdálenosti $a_1 = 4$ cm od prvního na společné kolmé spojnici obou vodičů. Vodiče jsou umístěny ve vakuu.

Řešení:

Velikost magnetické indukce B ve vzdálenosti r od nekonečného vodiče protékaného proudem I určíme pomocí zákona celkového proudu jako

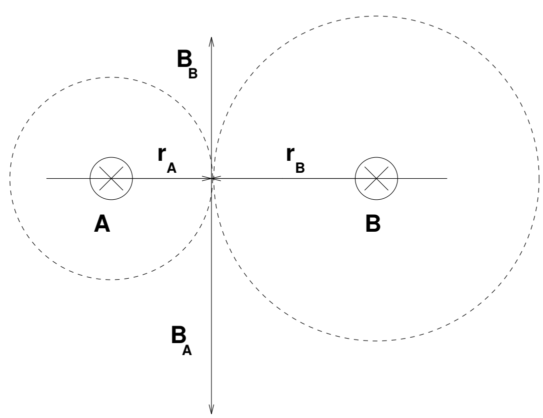
$$\oint_{(l)} \vec{B}.\mathrm{d}\vec{l} = \mu I \Rightarrow 2\pi r B = \mu I \Rightarrow B = \frac{\mu I}{2\pi r}. \tag{1}$$

Výsledné pole je pak dáno rozdílem velikostí magnetických indukcí, buzených jednotlivými dráty ve sledovaném bodě

$$B = B_A - B_B = B(r_A) - B(r_B) = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right). \tag{2}$$

Po dosazení číselných hodnot máme

$$B = \frac{4\pi.10^{-7}.2}{2\pi}\left(\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,06}\right) = \underline{\underline{3,333.10^{-6}\ \mathrm{T}}} \tag{3}$$



Obrázek 7: Schematické znázornění dvou vodičů.